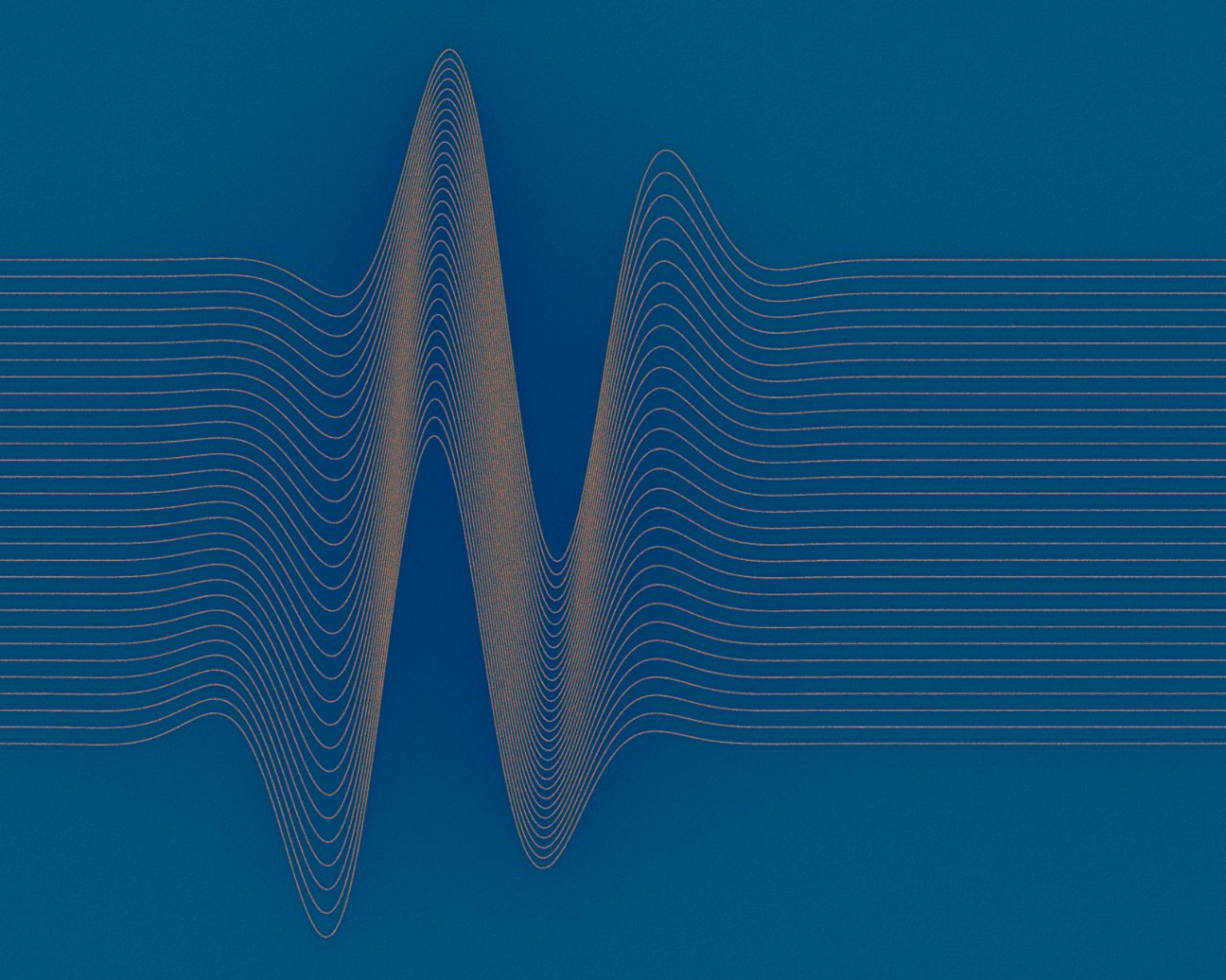




Riemann-Hilbert 学习笔记

利用反散射数据对称关系初探局部与非局部动力系统

作者: Icey Swan

时间: 2026 年 8 月 16 日

版本: beta-0.3.6

版权: © ⓘ ⓘ ⓘ ⓘ



起著甲辰尽丁未凡历三年余

Preface

本笔记存档于 [GitHub](#), 如发现任何错误, 请提 [issue](#) 或联系 hi@icey.one. 仅为一家之言, 仓促完成且未经他人审校, 难免存在疏漏, 谬误. 恳请各位读者不吝指正, 共同探讨与完善.

Contents

本笔记旨在记录笔者对 Riemann-Hilbert 方法的理解. RH 方法作为一种强大的数学工具, 在非线性偏微分方程的求解中, 尤其在可积系统中具有重要的应用价值. 通过对其理论背景, 基本方法及具体应用的学习, 笔者希望为读者提供一个清晰的入门指引. 各章节主要内容如下:

第一章主要介绍 RH 方法的背景知识, 包括 Plemelj 定理, RH 问题等基础知识. 对 RH 方法已有初步了解的读者可跳过本章.

第二章主要介绍利用 RH 方法求解零边界的 NLS 方程, 通过构造特征函数, 分析其解析性与对称性, 以及建立相关的 RH 问题, 最终推导出 NLS 方程的 N 孤子解. 本章节主要参考了复旦大学范恩贵老师的讲义, 并感谢同门韩刻蓉的帮助与讲解.

第三章主要介绍利用 RH 方法求解反时间, 反空间, 及反时空的反演形式, 这些方程是耦合 NLS 方程在不同约束条件下的特殊形式. 通过 Lax 对出发, 分析其散射数据的对称性, 进一步推导出这些非局部方程的 N 孤子解. 跳过了传统 RH 方法寻找 Jost 函数和跳跃矩阵的过程, 直接利用约化条件对散射数据进行分析, 极大简化了推导过程.

第四章在第三章的基础上, 将结论进一步推广到三维的反时空 NLS 方程. 通过分析其散射数据的对称性, 推导出三维反时空 NLS 方程的 N 孤子解. 相比于第三章, 第四章的结论可以推广至 $N \times N$ 的情形, 是本笔记的精髓. 本章节也是我的第一篇论文的主要内容. 感谢君言师姐推导的约化, 助益很多.

第五章为非零边界 NLS 方程的求解, 通过在 Riemann 面上引入仿射变换消去特征值的多值性, 将非零边界转化为零边界问题, 从而进入常规求解流程. 此章节较为复杂, 笔者目前仍在学习中, 错误较多, 望读者不吝指正.

符号约定

如无特别声明, 本笔记中使用的符号约定如下.

1. A, B, C 表示矩阵, $(A)_{ij}$ 表示 ij 位置元素, $[A]_j$ 表示第 j 列, I 表示单位阵;
2. a, b, c 表示数字, j, k, l 用作计数指标, v, w 表示向量;
3. 列向量及其对偶向量采用 Dirac 记号 $|y\rangle$ 与 $\langle x|$ 表示, 内积与外积分别记为 $\langle x|y\rangle$ 与 $|x\rangle\langle y|$. 本文不使用粗体区分向量与标量;
4. 直立体 i 表示虚数单位;
5. $\zeta \in \mathbb{C}_+$, $\bar{\zeta} \in \mathbb{C}_-$ 分别表示属于上/下半复平面的特征值, $\hat{\zeta}$ 表示由散射数据对称性得到的特征值;
6. α, β, γ 用作特征向量分量表示, σ, ω 一般与投影算子相关, θ 用作相位函数表示;
7. 共轭, 转置与 Hermitian 转置分别记为 A^* , A^T 与 $A^\dagger$;
8. $[A, B] = AB - BA$ 表示对易运算, f' 根据上下文表示 f 的导数或与 f 相区分的函数, f_x 表示求偏导;
9. 复平面上沿闭合曲线正向的积分记为 $\oint_\gamma f(z) dz$. 其他符号约定将在各章节中具体说明.

感想

转瞬已是毕业季. 思索再三, 决定将硕士期间学习 RH 方法的笔记整理成册, 以飨读者. 回首初次动笔, 还是 24 年回老家过年之时; 今日在同一张书桌前敲下初稿的最后一行, 心中不禁感慨万千.

2024 年春, 我初至北方某大学, 彼时尚不知将与可积系统结缘. 直至开学被分配至该方向, 才回想起当初黄老师曾建议我攻读动力系统, 却因缘际会未能成行. 未曾料到命运兜兜转转, 又回到了原点.

经过一学期的学习, 我对 RH 方法有了初步了解, 遂萌生了将所学整理成册的念头, 开启了这段漫长而孤独的写作之旅.

写作之路并非一帆风顺, 期间历经诸多考验. 首先是数学层面的困境. RH 方法作为一种强大的数学工具, 其理论艰深复杂, 每每提笔, 方觉自身基础尚有欠缺. 犹如第二章 (零背景的 NLS) 作为最先动笔的部分, 多次更改已不复初稿样貌. 其次是时间上的掣肘. 身为学生, 需兼顾学业与科研, 写作只能仰赖课余及假期, 进度难免缓慢. 在此奉劝有志于学术的同仁, 切勿担任助研等岗位, 俗务缠身实难挤出大块完整时间治学. 最后则是生活的挑战. 乡下老屋年久失修, 外墙坍塌, 两间屋顶损毁. 白日需与父亲一同砌墙补漏, 应对繁杂琐事; 唯有夜深人静时, 才能伏案推进进度. 农村老家未通暖气, 零下十余度的室温实难言舒适. 此时的写作, 既需要物理意义上的”热情”和字面意义上的”争分夺秒”. 深夜伏案, 四野寂寂, 唯余键盘声在黑暗中回荡. 恍若独行于漫长的甬道, 又似徘徊在幽邃的迷宫. 然而, 正如 A. Zee 所言: ”夜航人自有夜行法”. 我亦在此间摸索出了最适宜的节奏: 白日构思提纲, 夜深十点后开机撰写, 睡前再作反思与增补.

写作途中, 笔者逐渐体悟出一种难以言喻的, 某种漠然的相互理解. 宛如越过高墙, 漫步于满月清辉下的林地, 并在无边夜色中寻得了慰藉. 是邪, 非邪? 解释或属妄诞, 毕竟感受真实.

敬, 众生.

Icey Swan

2026 年 8 月 16 日

于河南老家深夜

目录

Preface	i
第 1 章 预备知识	1
1.1 Plemelj 公式	1
1.2 矩阵 RH 问题	4
第 2 章 RH 方法求解零边界的 NLS 方程	8
2.1 聚焦 NLS 方程	8
2.2 解析性与对称性	9
2.3 相关的 RH 问题	13
2.4 NLS 方程的 N 孤子解	17
第 3 章 利用 RH 对称性求解非局部 NLS 方程	20
3.1 非局部 NLS 方程及其约化	20
3.2 耦合 NLS 方程的 N 孤子解	20
3.3 非局部 NLS 方程的对称关系	21
3.4 动力学分析	24
第 4 章 三阶 AKNS 方程组的逆时空约化	26
4.1 AKNS 方程组的约化	26
4.2 利用 RH 方法求解广义耦合 NLS 方程	29
4.3 逆空间约化情形	34
4.4 三种约化下的散射数据对称性	39
4.5 进一步考虑二重约化情形	42
第 5 章 RH 方法求解非零边界 NLS 方程	43
5.1 非零边界的 NLS 方程	43
5.2 Riemann 面和单值化坐标	45
5.3 Jost 函数性质	46
5.4 相关广义 RH 问题	53
5.5 离散谱和留数条件	54
5.6 RH 问题的可解性	54
参考文献	58

第 1 章 预备知识

虽然 RH 方法的前置知识仅限于线性代数和复分析, 但鉴于读者水平参差不齐, 本章节将介绍若干常用概念.

1.1 Plemelj 公式

定理 1.1 (Abel 定理)

设 $A \in \mathbb{C}$, 对矩阵微分方程 $Y_x = AY$, 可得标量微分方程

$$(\det Y)_x = \operatorname{tr}(A) \det Y \quad (1.1.1)$$

从而有

$$\det Y(x) = \det Y(x_0) \cdot e^{\int_{x_0}^x \operatorname{tr}(A(t)) dt} \quad (1.1.2)$$

证明 由行列式的求导公式有,

$$(\det Y)_x = \operatorname{tr}(\operatorname{adj}(Y)Y_x), \quad (1.1.3)$$

其中 $\operatorname{adj}(Y)$ 表示 Y 的伴随矩阵. 代入 $Y_x = AY$, 并利用迹的循环不变性, 得

$$(\det Y)_x = \operatorname{tr}(\operatorname{adj}(Y)AY) = \operatorname{tr}(Y \operatorname{adj}(Y)A). \quad (1.1.4)$$

根据伴随矩阵恒等式 $Y \operatorname{adj}(Y) = (\det Y)I$ 可得

$$(\det Y)_x = \operatorname{tr}((\det Y)A) = \operatorname{tr}(A) \det Y \implies \det Y(x) = c_0 e^{\int_{x_0}^x \operatorname{tr}(A(t)) dt}, \quad (1.1.5)$$

再令 $x = x_0$, 有 $c_0 = \det Y(x_0)$, 即证. $\square$

定理 1.2 (Morera 定理)

如果 $f(z)$ 在单连通区域 D 内连续, 且对于 D 内任意闭曲线 Σ , 有 $\int_{\Sigma} f(z) dz = 0$, 则有 $f(z)$ 在 D 内解析 $\heartsuit$

定义 1.1 (Schwartz 空间)

欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 上的 Schwartz 空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 定义为

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{\alpha, \beta} = \sum_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial_\beta f(x)| < \infty, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}\} \quad (1.1.6)$$

其中 α, β 为多重指标, $\partial_\beta = \partial_{x_1}^{\beta_1} \cdots \partial_{x_n}^{\beta_n}$. f 称为速降函数或 Schwartz 函数. $\clubsuit$

简单来说, 速降函数是指当 $x \rightarrow \pm\infty$ 时趋近于零的速度比所有的多项式的倒数都快, 并且任意阶的导数都有这种性质的函数。

定义 1.2 (Bellmann-Gronwall 不等式)

设 $u(t)$ 和 $g(t)$ 是定义在区间 $[t_0, T]$ 上的非负连续函数, 且满足

$$u(t) \leq A + \int_{t_0}^t g(s)u(s) ds, \quad t \in [t_0, T] \quad (1.1.7)$$

其中 A 为常数, 则

$$u(t) \leq A \exp \int_{t_0}^t g(s) ds, \quad t \in [t_0, T] \quad (1.1.8)$$

定理 1.3 (Painleve 开拓定理)

设 D_1, D_2 为两个没有公共点的区域, 边界为 Γ , 并设 $f_1(z), f_2(z)$ 分别在 D_1, D_2 内解析, 在 $D_1 + \Gamma, D_2 + \Gamma$ 上连续, 且 $f_1(z) = f_2(z), \forall z \in \Gamma$, 则

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) & z \in D_1 \\ f_1(z) = f_2(z) & z \in \Gamma \\ f_2(z) & z \in D_2 \end{cases} \quad (1.1.9)$$

在 $D_1 + D_2 + \Gamma$ 内解析.

证明 显然 $f(z)$ 在 $D_1 + D_2 + \Gamma$ 上连续, 根据 Morera 定理, 只需证明 $f(z)$ 沿任何闭曲线 Σ 的积分为 0.

如果 $\Sigma \subset D_1$, 或 $\Sigma \subset D_2$, 则由 $f(z)$ 的解析性可得

$$\int_{\Sigma} f(z) dz = 0 \quad (1.1.10)$$

如果 Σ 同时包含于 D_1, D_2 内, 把 Γ 在 Σ 内的曲线记为 C_{γ} , 则

$$\int_{C_1+C_{\gamma}} f(z) dz = 0, \quad \int_{C_1+C_{\gamma}}^- f(z) dz = 0 \quad (1.1.11)$$

故

$$\int_{\Sigma} f(z) dz = \int_{C_1+C_2} f(z) dz = \int_{C_1+C_{\gamma}} f(z) dz = \int_{C_1+C_{\gamma}}^- f(z) dz = 0. \quad (1.1.12)$$

□

引理 1.1

设 $f(\xi)$ 在 $z \in \Sigma$ 满足 μ 次 Hölder 条件, 且 $z' \rightarrow z$ 时, h/d 有界, 其中

$$h = |z' - z|, \quad d = \min_{\xi \in \Sigma} |\xi - z'|, \quad (1.1.13)$$

则

$$\lim_{z' \rightarrow z} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z'} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi \quad (1.1.14)$$

♥

证明

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z'} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{(\xi - z)(f(\xi) - f(z)) - (\xi - z')(f(\xi) - f(z))}{(\xi - z')(\xi - z)} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{z' - z}{\xi - z} \cdot \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{h}{d} M \frac{(\xi - z)^{\mu}}{\xi - z} d\xi = \Delta_1 + \Delta_2 \end{aligned} \quad (1.1.15)$$

其中

$$\begin{aligned} |\Delta_1| &\leq \frac{hM}{2\pi d} \int_{C_{\delta}} \frac{(\xi - z)^{\mu}}{\xi - z} d|\xi| \leq \frac{hM}{2\pi d} \int_0^{\delta} t^{\mu-1} dt = \frac{hM}{2\pi d \delta} \delta^{\mu} (C_{\delta} = \{|\xi - z| \leq \delta\}) \\ |\Delta_2| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma \setminus C_{\delta}} \frac{(f(\xi) - f(z))(z - z')}{\xi - z} d\xi \right| \end{aligned} \quad (1.1.16)$$

由于 $\Sigma \setminus C_{\delta}$ 不包含 z , 故 Δ_2 为关于 z' 的连续函数, 则

$$|\Delta_2| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma \setminus C_{\delta}} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z'} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma \setminus C_{\delta}} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi \right| < |\Delta_1| \quad (1.1.17)$$

取 $\delta \rightarrow 0$, 可令 $|\Delta_1| < \frac{\epsilon}{2}$, 故 $|\Delta_1| + |\Delta_2| < \epsilon$

□

定理 1.4 (Plemelj 定理)

设 $z \in \Sigma$ 为正则点, 且不为边界点, $f(\xi)$ 在 z 点满足 μ 次 Hölder 条件, 且 $z' \rightarrow z$ 时, h/d 有界, 其中 $h = |z' - z|$, $d = \min_{\xi \in \Sigma} |\xi - z'|$, 则

$$F_+ = \lim_{z' \rightarrow z} F(z') = F(z) + \frac{1}{2}f(z), \quad z' \in \Sigma_+, \quad (1.1.18)$$

$$F_- = \lim_{z' \rightarrow z} F(z') = F(z) - \frac{1}{2}f(z), \quad z' \in \Sigma_-, \quad (1.1.19)$$

证明 首先证明闭区线情形: $\forall z' \in \Sigma_+$

$$\begin{aligned} F_+ &= \lim_{z' \rightarrow z} F(z') = \lim_{z' \rightarrow z} \int_{\Sigma} \frac{1}{2\pi i} \frac{f(\xi)}{\xi - z'} d\xi \\ &= \lim_{z' \rightarrow z} \int_{\Sigma} \frac{1}{2\pi i} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z'} d\xi + \frac{f(z)}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{1}{\xi - z'} d\xi \\ &= \lim_{z' \rightarrow z} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma_+} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z'} d\xi + f(z) \\ &= \lim_{z' \rightarrow z} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma_+} \frac{f(\xi)}{\xi - z'} d\xi - \frac{f(z)}{2\pi i} \int_{\Sigma_+} \frac{1}{\xi - z'} d\xi + f(z) \\ &= F(z) + \frac{1}{2}f(z) \end{aligned} \quad (1.1.20)$$

$F_-(z')$ 同理, 下证 Σ 为开曲线情形, 则可补充 Σ' , s.t. $\Sigma \cup \Sigma'$ 为闭曲线, 且定义 $\forall \xi \in \Sigma', f(\xi) = 0$, 则

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma \cup \Sigma'} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi. \quad (1.1.21)$$

则由开曲线情形可得

$$\begin{aligned} F_+(z) &= \lim_{\substack{z' \rightarrow z \\ z' \in \Sigma_+}} \int_{\Sigma \cup \Sigma'} \frac{f(\xi)}{\xi - z'} d\xi = \int_{\Sigma \cup \Sigma'} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi + \frac{f(z)}{2\pi i} \int_{\Sigma \cup \Sigma'} \frac{1}{\xi - z'} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi - \frac{f(z)}{2\pi i} \int_{\Sigma'} \frac{1}{\xi - z} d\xi + f(z) = F(z) + \frac{1}{2}f(z) \end{aligned} \quad (1.1.22)$$

$F_-(z')$ 同理

注 如果 $z \in \Sigma$ 为一个角点, 在其两切线的夹角为 α , 则可

$$\begin{aligned} F_+(z) &= \lim_{z' \rightarrow z, z' \in D} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{f(\xi)}{\xi - z'} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi + \frac{\alpha}{2\pi} f(z) + (1 - \frac{\alpha}{2\pi}) f(z) \\ &= F(z) - \frac{\alpha}{2\pi} f(z) \end{aligned} \quad (1.1.23)$$

$$\begin{aligned} F_-(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi + \frac{\alpha}{2\pi} f(z) - \frac{\alpha}{2\pi} f(z) \\ &= F(z) - \frac{\alpha}{2\pi} f(z) \end{aligned} \quad (1.1.24)$$

定义 1.3 (Plemelj 公式)

由 (1.1.18) - (1.1.19), (1.1.23) - (1.1.24) 可以看出, 无论 z 是正则点还是角点, 都有

$$F_+(z) - F_-(z) = f(z), \quad z \in \Sigma \quad (1.1.25)$$

$$F_+(z) - F_-(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Sigma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi =: H(f)(z) \quad (1.1.26)$$

称为标量 RH 问题, 其解可用 Cauchy 积分给出

$$F(z) = A + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad z \in \mathbb{C} \quad (1.1.27)$$

其中 A 为任意常数, 一般被边值或渐进条件决定, 这一公式被称为 Plemelj 公式.

对于如下 RH 问题

$$G_+(z) = G_-(z)v(z), \quad z \in \Sigma \quad (1.1.28)$$

只需两边取对数变换则有

$$\ln G_+(z) - \ln G_-(z) = \ln v(z), \quad z \in \Sigma \quad (1.1.29)$$

由 Plemelj 公式, 则有

$$\ln G(z) = A + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{v(\xi)}{\xi - z} d\xi \implies G(z) = B \exp \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \right), \quad z \in \Sigma \quad (1.1.30)$$

其中 B 为任意常数.

1.2 矩阵 RH 问题

定义 1.4 (RH 问题)

设 Σ 为复平面 $\mathbb{C}$ 内的有向路径, 假设存在一个 Σ^0 上的光滑映射 $v(z) : \Sigma \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$, 则 (Σ, v) 决定了一个 RH 问题, 寻找一个 n 阶矩阵 $M(z)$ 满足

$$M(z) \in C, \quad (\mathbb{C} \setminus \Sigma) \quad (1.2.1)$$

$$M_+(z) = M_-(z)v(z), \quad z \in \Sigma \quad (1.2.2)$$

$$M(z) \rightarrow I, \quad z \rightarrow \infty \quad (1.2.3)$$

其中 $M_{\pm}$ 表示在正负区域内 $z' \rightarrow z$ 时的极限, Σ 称为跳跃曲线, $v(z)$ 称为跳跃矩阵.

根据 Beadls-Coifman 定理, 如上 RH 问题的解可通过如下方式构造: 不妨设跳跃矩阵 $v(z)$ 具有如下分解

$$v = (b_-)^{-1} b_+ \quad (1.2.4)$$

由此, 可构造

$$w_+ = b_+ - I, \quad w_- = I - b_- \quad (1.2.5)$$

进一步可定义 Cauchy 投影算子

$$(C_{\pm} f)(z) = \lim_{\substack{z' \rightarrow z \in \Sigma \\ z' \in \pm \Sigma}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{f(\xi)}{\xi - z'} d\xi \quad (1.2.6)$$

则可以证明如果 $f(z) \in L^2(\Sigma)$, 则 $C_{\pm} : L^2 \rightarrow L^2$ 的有界算子, 且 $C_+ - C_- = 1$, 再定义算子

$$C_w f = C_+(f w_-) - C_-(f w_+) \quad (1.2.7)$$

则 $C_w : L^2 \cap L^{\infty} \rightarrow L^2$ 的有界算子.

定理 1.5 (Beals-Coifman 定理)

设 $\det v = 1$, 算子 $I - C_w$ 在 $L^2(\Sigma)$ 上可逆, $\mu \in I + L^2(\Sigma)$ 为下列方程

$$(I - C_w)\mu = I \quad (1.2.8)$$

的解, 且

$$(I - C_w)(\mu - I) = C_w I + C_+ w_- + C_- w_+ \in L^2(\Sigma) \quad (1.2.9)$$

则

$$M(z) = I + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{\mu(\xi) w(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (1.2.10)$$

为上述 RH 问题的唯一解, RH 问题 $M(z)$ 的可解等价于奇异积分方程 (1.2.8).

证明 只需证明 (1.2.10) 满足 (1.2.8)

$$\begin{aligned}
 M_+ &= I + \lim_{z' \rightarrow z \in \Sigma} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{\mu(\xi)w(\xi)}{\xi - z} d\xi \stackrel{(1.2.6)}{=} I + C_+(\mu w) \\
 &= I + C_+(\mu w_-) + C_+(\mu w_+) = I + C_+(\mu w_-) + C_-(\mu w_+) + C_+(\mu w_+) + C_-(\mu w_+) \\
 &\stackrel{(1.2.7)}{=} I + C_w(\mu) + \mu w_+ \stackrel{(1.2.8)}{=} \mu + \mu w_+ = \mu(I + w_+) = \mu b_+
 \end{aligned} \tag{1.2.11}$$

同理有

$$M_-(z) = \mu b_- \tag{1.2.12}$$

故有

$$M_+(z) = \mu b_+ = \mu b_-(b_-)^{-1}b_+ = M_-(z)v(z) \tag{1.2.13}$$

下证唯一性, 先证 M 可逆, 对 (1.2.2) 取行列式, 并注意到 $\det v(z) = 1$, 则 $\det M_+(z) = \det M_-(z)$. 故由 Painleve 开拓定理得 $\det M(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上解析. 由 (1.2.3) 得

$$\det M(z) \rightarrow 1, z \rightarrow \infty \tag{1.2.14}$$

故由 Liouville 定理可知 $\det M(z) = c$, 再由渐进条件得 $c = 1$, 故 $M(z)$ 可逆.

设 $\tilde{M}$ 为上述 RH 问题的另一个解, 则 $\tilde{M}$ 可逆, 且在 $\mathbb{C} \setminus \Sigma$ 上解析, 且在 Σ 上满足

$$(M\tilde{M}^{-1}) = M_+\tilde{M}_+^{-1} = M_-v(\tilde{M}_-v)^{-1} = M_-(\tilde{M}_-)^{-1} = (M\tilde{M}^{-1})_- \tag{1.2.15}$$

由 Painleve 开拓定理, $M\tilde{M}^{-1}$ 在 $\mathbb{C}$ 上解析. 另外由 $M, \tilde{M} \rightarrow I$, 故 $M\tilde{M}^{-1}$ 有界, 故为常矩阵. 由渐进性得

$$M\tilde{M}^{-1} = I \implies M = \tilde{M} \tag{1.2.16}$$

□

注 由 RH 问题解的唯一性, 解与跳跃矩阵 $v(z)$ 的分解无关, 因此可以考虑 $v(z)$ 的平凡解

$$b_- = I, \quad b_+ = v, \tag{1.2.17}$$

故可构造 $w_- = 0, \quad w_+ = v - I, \quad w = v - I$, 则

$$C_w f = C_+(fw_-) + C_-(fw_+) = C_+(f(v - I)), \quad \mu = (I - C_w)^{-1}I \tag{1.2.18}$$

则 RH 问题的解可表示为

$$M(z) = I + \frac{1}{2\pi i} \int_{+\Sigma} \frac{\mu(\xi)(v(\xi) - I)}{\xi - z} d\xi \tag{1.2.19}$$

RH 方法的关键思想就是改变积分路径, 通过跳跃矩阵的分解情况, 确定对积分路径进行一系列形变, 再取极限去除跳跃矩阵为单位阵的情形, 将其化解为可解的 RH 问题, 所以一个自然的问题就是: 「为什么可以扔掉跳跃矩阵为单位阵的路径? 或者说为什么跳跃矩阵对 RH 问题的解不产生贡献。」

这很容易通过表达式 (1.2.19) 看出, 我们将积分路径分解为 $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$ 且

$$v = \begin{cases} v_1 \neq I & \Sigma_1, \\ v_1 = I & \Sigma_2 \end{cases} \tag{1.2.20}$$

则在 Σ_1 上, $v - I = v_1 - I \neq 0$, 在 Σ_2 上, $v - I = v_1 - I = 0$, 故

$$\begin{aligned}
 M(z) &= I + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{\mu(\xi)(v(\xi) - I)}{\xi - z} d\xi \\
 &= I + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma_1} \frac{\mu(\xi)(v_1(\xi) - I)}{\xi - z} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma_2} \frac{\mu(\xi)(v_2(\xi) - I)}{\xi - z} d\xi \\
 &= I + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma_1} \frac{\mu(\xi)(v_1(\xi) - I)}{\xi - z} d\xi
 \end{aligned} \tag{1.2.21}$$

易得 RH 问题 $(\Sigma, v(z))$ 的解与 $(\Sigma_1, v_1(z))$ 的解相同, 即跳跃矩阵为单位阵的路径 Σ_2 对 RH 问题的解无贡献, 可以舍去. 只求 Σ_1 上的 RH 问题

引理 1.2

设 A, B 为 N 阶复矩阵, 且 $AB = BA$, 对任意特征值 λ , 矩阵 A 的特征子空间 $E_\lambda(A) := \ker(A - \lambda I)$ 在矩阵 B 的作用下保持不变, 即

$$BE_\lambda(A) \subseteq E_\lambda(A). \quad (1.2.22)$$

特别地, 若 A 有 n 个互不相同的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, 且

$$Ar_i = \lambda_i r_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.2.23)$$

则存在 $\mu_i \in \mathbb{C}$ 使得

$$Br_i = \mu_i r_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.2.24)$$

因而 $r_1, \dots, r_n$ 构成 A, B 的一组公共特征向量基, 且 A, B 可同时对角化。



证明 任取 $v \in E_\lambda(A)$, 则

$$(A - \lambda I)Bv = B(A - \lambda I)v = 0. \quad (1.2.25)$$

因而 $Bv \in E_\lambda(A)$, 即 $BE_\lambda(A) \subseteq E_\lambda(A)$ 。

设 A 有 n 个互异特征值, $E_{\lambda_i}(A) = \text{span}\{r_i\}$. 由于 $Br_i \in E_{\lambda_i}(A)$, $\exists \mu_i \in \mathbb{C}$ 使得 $Br_i = \mu_i r_i$, 令 $R = (r_1, \dots, r_n)$, 则 R 可逆, 且

$$R^{-1}AR = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad R^{-1}BR = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n). \quad (1.2.26)$$



注 由 $AB = BA$ 也易见 $Be^{Ax} = e^{Ax}B$.

考虑常系数齐次线性方程组

$$\frac{dy}{dx} = Ay. \quad (1.2.27)$$

推论 1.1

设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 有 n 个互不相同的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, 相应的特征向量为 $r_1, \dots, r_n$. 则

$$\Phi(x) = (e^{\lambda_1 x} r_1, e^{\lambda_2 x} r_2, \dots, e^{\lambda_n x} r_n) = R \text{diag}(e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}) \quad (1.2.28)$$

为方程 (1.2.27) 的基解矩阵, 其中 $R = (r_1, \dots, r_n)$.



现考虑常系数偏微分方程组

$$\frac{\partial y}{\partial x} = Ay, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = By. \quad (1.2.29)$$

推论 1.2

设 A, B 为 n 阶矩阵, 满足 $AB = BA$, 且 A 有 n 个互不相同的特征值。记

$$Ar_i = \lambda_i r_i, \quad Br_i = \mu_i r_i. \quad (1.2.30)$$

则上述方程组的规范化基解矩阵为

$$F(x, t) = e^{Ax} e^{Bt} = e^{Ax+Bt} = R \text{diag}(e^{\lambda_1 x + \mu_1 t}, \dots, e^{\lambda_n x + \mu_n t}) R^{-1}. \quad (1.2.31)$$

因而方程组的一般解为 $y(x, t) = e^{Ax+Bt} c_0$, 其中 $c_0 \in \mathbb{C}^n$ 为常向量. 同理有

$$\Phi(x, t) = F(x, t)R = (e^{\lambda_1 x r_1}, \dots, e^{\lambda_n x r_n}) \quad (1.2.32)$$

也是该方程组的基解矩阵。



证明 由 (1.2.29), 不妨设 $y(x, t) = e^{Ax} c(t)$, 将其代入 (1.2.29) 右式可得

$$e^{Ax} c'(t) = B e^{Ax} c(t) = e^{Ax} B c(t) \implies c'(t) = B c(t) \implies c(t) = e^{Bt} c_0, \quad (1.2.33)$$

则 $y = e^{Ax} e^{Bt} c_0 = e^{Ax+Bt} c_0$.



引理 1.3 (Riemann-Lebesgue 引理)

设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积, 则

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) e^{ikx} dx = 0 \quad (1.2.34)$$



证明 先证阶梯函数情形. 设

$$s(x) = \sum_{j=1}^m c_j \chi_{[x_{j-1}, x_j)}(x), \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b. \quad (1.2.35)$$

则

$$\int_a^b s(x) e^{ikx} dx = \sum_{j=1}^m c_j \int_{x_{j-1}}^{x_j} e^{ikx} dx = \sum_{j=1}^m c_j \frac{e^{ikx_j} - e^{ikx_{j-1}}}{ik}. \quad (1.2.36)$$

因而

$$\left| \int_a^b s(x) e^{ikx} dx \right| \leq \frac{2}{|k|} \sum_{j=1}^m |c_j| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \quad (1.2.37)$$

现设 $f \in L^1([a, b])$. 由阶梯函数在 L^1 中的稠密性, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在阶梯函数 s 使得

$$\|f - s\|_{L^1(a, b)} < \varepsilon. \quad (1.2.38)$$

于是

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) e^{ikx} dx \right| &\leq \left| \int_a^b (f(x) - s(x)) e^{ikx} dx \right| + \left| \int_a^b s(x) e^{ikx} dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x) - s(x)| dx + \left| \int_a^b s(x) e^{ikx} dx \right| \\ &< \varepsilon + \left| \int_a^b s(x) e^{ikx} dx \right|. \end{aligned} \quad (1.2.39)$$

由前一步, 对该固定 s , 存在 $K > 0$, 使得当 $|k| \geq K$ 时

$$\left| \int_a^b s(x) e^{ikx} dx \right| < \varepsilon. \quad (1.2.40)$$

故当 $|k| \geq K$ 时,

$$\left| \int_a^b f(x) e^{ikx} dx \right| < 2\varepsilon. \quad (1.2.41)$$

由于 ε 任意, 结论成立. □

第 2 章 RH 方法求解零边界的 NLS 方程

本章节我们以聚焦 NLS 方程为例, 介绍 RH 方法求解零边界非线性偏微分方程的基本步骤. 主要参考复旦大学范恩贵老师的讲义 [4] 的第五章.

2.1 聚焦 NLS 方程

对于二阶 AKNS 系统, 为表示方便, 我们引入 Pauli 矩阵

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.1.1)$$

下文如无特别声明, 默认 $\sigma_i, (i = 1, 2, 3)$ 表示 Pauli 矩阵.

2.1.1 特征函数

考虑聚焦 NLS 方程

$$iq_t(x, t) + q_{xx}(x, t) + 2q(x, t)|q(x, t)|^2 = 0 \quad (2.1.2)$$

满足的初值问题 $q(x, 0) = q_0(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 其中 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 表示 Schwartz 空间.

方程 (2.1.2) 具有如下矩阵形式的 Lax 对

$$\psi_x = -iz\sigma_3\psi + P\psi \quad (2.1.3)$$

$$\psi_t = -2iz^2\sigma_3\psi + Q\psi \quad (2.1.4)$$

其中

$$P = \begin{pmatrix} q & \\ -q^* & \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} i|q|^2 & iq_x \\ iq_x^* & -i|q|^2 \end{pmatrix} + 2zP$$

满足零曲率方程 $U_t - V_x + [U, V] = 0$, 即

$$(P - iz\sigma_3)_t - (Q - 2iz^2\sigma_3)_x + [P - iz\sigma_3, Q - 2iz^2\sigma_3] = 0 \quad (2.1.5)$$

2.1.2 渐进性

由于 $q_0(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 且 $q(x, t), q_x(x, t) \rightarrow 0, (x \rightarrow \infty)$, 故 x 足够大时, P, Q 可忽略, 从而 Lax 对 (2.1.3) - (2.1.4) 可近似为

$$\psi_x \sim -iz\sigma_3\psi, \quad \psi_t \sim -2iz^2\sigma_3\psi$$

可得渐进形式的 Jost 解 $\psi = e^{-i\theta(z)\sigma_3}, (x \rightarrow \infty)$, 其中 $\theta(z) = zx + 2z^2t$. 下面为表示方便, 不妨记 $E := e^{i\theta(z)\sigma_3}$, 做变换 $\mu(x, t, z) = \psi(x, t, z)E$, 则有

$$E^{-1} = e^{-i\theta(z)\sigma_3}, \quad \mu(x, t, z) \rightarrow I(x \rightarrow \infty) \quad (2.1.6)$$

则可得

$$\mu_x = \psi_x E + \psi E(i\sigma_3 z) \quad (2.1.7)$$

$$\mu_t = \psi_t E + \psi E(2i\sigma_3 z^2) \quad (2.1.8)$$

带入 Lax 对 (2.1.3) - (2.1.4) 可得

$$\mu_x = (P\psi - iz\sigma_3\psi)E + \psi E(i\sigma_3 z) \quad (2.1.9)$$

$$\mu_t = (Q\psi - 2iz^2\sigma_3\psi)E + \psi E(2i\sigma_3 z^2) \quad (2.1.10)$$

故有

$$\mu_x = P\mu - iz[\sigma_3, \mu] \implies \mu_x + iz[\sigma_3, \mu] = P\mu \quad (2.1.11)$$

同理可得

$$\mu_t + 2iz^2[\sigma_3, \mu] = Q\mu \quad (2.1.12)$$

由 (2.1.11) 式可得

$$\mu_x + iz\hat{\sigma}\mu = P\mu \quad (2.1.13)$$

$$e^{i\theta(z)\hat{\sigma}_3}\mu_x + iz\hat{\sigma}_3e^{i\theta(z)\hat{\sigma}_3}\mu = e^{i\theta(z)\hat{\sigma}_3}P\mu \quad (2.1.14)$$

其中 $\hat{\sigma}_3 X = [\sigma_3, X]$, $e^{i\theta(z)\hat{\sigma}_3} X = EXE^{-1}$, 为表示方便不妨记 $\hat{E} = e^{i\theta(z)\hat{\sigma}_3}$. 易得 Lax 对的全微分形式

$$d(\hat{E}\mu) = \hat{E}[(Pdx + Qdt)\mu] \quad (2.1.15)$$

为构造规范的 Riemann-Hilbert 问题, 即其解在 $z \rightarrow \infty$ 时渐进于单位阵, 现只需证明 $\mu \rightarrow I(z \rightarrow \infty)$.

证明 将 μ 在无穷远点 Taylor 展开

$$\mu = \mu^{(0)} + \frac{1}{z}\mu^{(1)} + \dots = \mu^{(0)} + O(z^{-1}) \quad (2.1.16)$$

其中 $\mu^{(0)}, \mu^{(1)}$ 与 z 无关, 将上式代入 (2.1.11), (2.1.12) 比较 z 的次数可得

$$\begin{aligned} [\mu^{(0)} + O(z^{-1})]_x + iz \left[\sigma_3, \mu^{(0)} + \frac{\mu^{(1)}}{z} + O(z^{-2}) \right] &= P [\mu^{(0)} + O(z^{-1})] \\ [\mu^{(0)} + O(z^{-1})]_t + 2iz^2 \left[\sigma_3, \mu^{(0)} + \frac{\mu^{(1)}}{z} + O(z^{-2}) \right] &= (Q_0 + 2zP) [\mu^{(0)} + O(z^{-1})] \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

可得 x 部分:

$$\begin{aligned} z: [\sigma_3, \mu^{(0)}] &= 0 \\ z^0: \mu^{(0)} + 2iz[\sigma_3, \mu^{(1)}] &= P\mu^{(0)} \implies \mu^{(0)} \text{ 为对角阵} \end{aligned} \quad (2.1.18)$$

t 部分:

$$\begin{aligned} z^2: [\sigma_3, \mu^{(0)}] &= 0 \\ z: i[\sigma_3, \mu^{(1)}] &= P\mu^{(0)} \implies \mu_x^{(0)} = 0 \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

故 $\mu^{(0)}$ 为与 x 无关的对角矩阵, 因此 (2.1.16) 式对 x, z 同时取极限, 并交换极限顺序可得

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow \infty} \mu = \lim_{x \rightarrow \infty} \lim_{z \rightarrow \infty} (\mu^{(0)} + O(z^{-1})) \quad (2.1.20)$$

利用 (2.1.6), (2.1.16) 式可得 $\mu^{(0)} = I$, 故 $\mu \rightarrow I(z \rightarrow \infty)$. □

再将 $\mu^{(0)} = I$ 代入 (2.1.19) 式比较矩阵对角元素得

$$q(x, t) = 2i(\mu^{(1)})_{12} = 2i \lim_{z \rightarrow \infty} (z\mu)_{12} \quad (2.1.21)$$

注 上式可将 NLS 方程与特征函数联系起来, 接下来将特征函数与 RH 问题建立联系. 从而 NLS 方程的解可用 RH 问题的解表示, 然后通过 RH 问题反接触 NLS 方程的解, 即

$$NLS \iff \text{特征函数} \iff RH \text{问题}$$

2.2 解析性与对称性

由于 (2.1.15) 为全微分形式, 积分与路径无关, 故选择两个特殊路径:

$$(-\infty, t) \rightarrow (x, t), \quad (+\infty, t) \rightarrow (x, t)$$

因此可获得 Lax 对 (2.1.11), (2.1.12) 的两个特征函数

$$\mu_1 = I + \int_{-\infty}^x e^{-iz(x-y)\sigma_3} P \mu_1 dx, \quad \mu_2 = I - \int_{+\infty}^x e^{-iz(x-y)\sigma_3} P \mu_2 dx \quad (2.2.1)$$

证明 由 (2.1.15) 式, 由 $(\hat{E}\mu)_x = \hat{E}P\mu$ 可得

$$\hat{E}\mu|_{-\infty}^x = \int_{-\infty}^x \hat{E}P\mu \, dy \quad (2.2.2a)$$

$$LHS = \hat{E}\mu - \hat{E}I, \quad RHS = \int_{-\infty}^x e^{i(z y + z^2 t)} \hat{\sigma}_3 P\mu \, dy \quad (2.2.2b)$$

两边同时乘以 $\hat{E}^{-1}$, 即得 μ_1 , 同理可得 μ_2 . □

显然, 其仍具有如下性质

$$\mu_1, \mu_2 \rightarrow I(x \rightarrow \pm\infty), \quad \mu_1, \mu_2 \rightarrow I(z \rightarrow +\infty) \quad (2.2.3)$$

由于 $\psi_1 = \mu_1 E^{-1}, \psi_2 = \mu_2 E^{-1}$, 为 Lax 对的两个解, 而 Lax 对为一节齐次线性方程组, 故这两个解线性相关, 故有

$$\mu_1(x, t, z) = \mu_2(x, t, z) \hat{E}S(z), \quad S(z) = \begin{pmatrix} s_{11}(z) & s_{12}(z) \\ s_{21}(z) & s_{22}(z) \end{pmatrix} \quad (2.2.4)$$

其中矩阵 $S(z)$ 与 x, t 无关, 称为谱函数矩阵.

再由 $\mu = \psi E$ 可知 $\det(\mu_j) = \det(\psi_j)$. 又因为 $\text{tr}(P - iz\sigma_3) = \text{tr}(Q - 2iz^2\sigma_3) = 0$, 由 Abel 定理可得

$$\det(\psi_j)_x = \det(\psi_j)_t = 0 \quad (2.2.5)$$

故有 $\det(\mu_j)_x = \det(\mu_j)_t = 0$, 这说明 $\det(\mu_j)$ 与 x, t 无关, 再由渐进性可得

$$\det(\mu_j) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \det(\mu_j) = 1, \quad (j = 1, 2) \quad (2.2.6)$$

故对 (2.2.4) 两边取行列式有 $\det S(z) = 1$.

2.2.1 解析性

下面我们考虑特征函数 μ_1, μ_1 和谱矩阵 $S(z)$ 的解析性, 记 μ_1 的第一二列分别为

$$\mu_1 = \begin{pmatrix} \mu_1^{11} & \mu_1^{12} \\ \mu_1^{21} & \mu_1^{22} \end{pmatrix} = (\mu_1^+, \mu_1^-) \quad (2.2.7)$$

则由积分方程 (2.2.1) 可得如下 Volterra 积分方程

$$\mu_1^+(x, t, z) = (1, 0)^T - \int_{-\infty}^x \begin{pmatrix} 1 & \\ & e^{iz(x-y)} \end{pmatrix} P\mu_1^+ \, dy \quad (2.2.8)$$

$$\mu_1^-(x, t, z) = (0, 1)^T - \int_{-\infty}^x \begin{pmatrix} e^{-iz(x-y)} & \\ & 1 \end{pmatrix} P\mu_1^- \, dy \quad (2.2.9)$$

对于上面两方程, 由于积分变量 $y < x$, 可得

$$e^{2iZ(x-y)} = e^{2i(x-y)\text{Re}(z)} e^{-2i(x-y)\text{Im}(z)}, \quad e^{-2iZ(x-y)} = e^{-2i(x-y)\text{Re}(z)} e^{2i(x-y)\text{Im}(z)}$$

因此当 $q(x) \in L^1(\mathbb{R})$ 时, 通过构造序列与 Neumann 级数, 可得 μ_1^+, μ_1^- 分别在 $\mathbb{C}_\pm$ 解析性.

注 上面 Volterra 积分的推导: 考虑到 $e^{\hat{\sigma}_3 X} = e^{\sigma_3 X} e^{-\sigma_3}$, 故有

$$\begin{aligned} \mu_1 &= I + \int_{-\infty}^x e^{-iz(x-y)\hat{\sigma}_3} P\mu_1 \, dy = I + \int_{-\infty}^x e^{-iz(x-y)\sigma_3} P e^{iz(x-y)\sigma_3} \mu_1 \, dy \\ &= I + \int_{-\infty}^x \begin{pmatrix} & qe^{2iz(x-y)} \\ -q^*e^{-2iz(x-y)} & \end{pmatrix} \mu \, dy \end{aligned}$$

故 $\mu_1^+ =, \mu_1^- =$

证明 下证 μ_1^+ 的解析性.

Step1. 解的存在性: 事实上方程 (2.2.8) 有如下 Neumann 级数分解

$$\mu_1^+ = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x, z), \quad c_{n+1} = \int_{-\infty}^x \begin{pmatrix} 1 & \\ & e^{iz(x-y)} \end{pmatrix} P c_n(y, z) \, dy \quad (2.2.10)$$

其分量形式为

$$c_{n+1}^{(1)}(x, z) = \int_{-\infty}^x q(y) c_n^{(2)}(y, z) dy, \quad c_{n+1}^{(2)}(x, z) = \int_{-\infty}^x e^{2iz(x-y)} p(y) c_n^{(1)}(y, z) dy \quad (2.2.11)$$

其中 $c_{n+1} = (c_{n+1}^{(1)}, c_{n+1}^{(2)})^T$, $p = -q^*$. 由 $c_0^{(2)} = 0 \implies c_{2n+1}^{(1)} = c_{2n}^{(2)} = 0$, 故上面方程可简化为

$$c_{2n}^{(1)}(x, z) = \int_{-\infty}^x q(y) c_{2n-1}^{(2)}(y, z) dy, \quad c_{2n+1}^{(2)}(x, z) = \int_{-\infty}^x e^{2iz(x-y)} p(y) c_{2n}^{(1)}(y, z) dy \quad (2.2.12)$$

对上面方程组进一步简化, 引入如下恒等式

$$\begin{aligned} \frac{1}{j!} \int_{-\infty}^x |f(\xi)| \left[\int_{-\infty}^{\xi} |f(\eta)| \right]^j d\xi &= \frac{1}{(j+1)!} \int_{-\infty}^x \frac{d}{d\xi} \left[\int_{-\infty}^{\xi} |f(\eta)| \right]^{j+1} d\xi \\ &= \frac{1}{(j+1)!} \left[\int_{-\infty}^x |f(\xi)| d\xi \right]^{j+1} \quad (f \in L^1(\mathbb{R})) \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

利用归纳法可证明当 $\text{Im}(z) > 0$ 时, 有

$$|c_{2n+1}^{(2)}| = \frac{u^{n+1}(x)}{(n+1)!} \frac{v^n(x)}{n!}, \quad |c_{2n}^{(1)}| = \frac{u^n(x)}{n!} \frac{v^n(x)}{n!} \quad (2.2.14)$$

其中

$$u(x) = \int_{-\infty}^x |p(y)| dy, \quad v(x) = \int_{-\infty}^x |q(y)| dy \quad (2.2.15)$$

事实上, 当 $\text{Im}(z) > 0$ 时, $|e^{2iz(x-y)}| \leq 1$, 利用 $c_0^{(1)} = 1$, 由 (2.2.14) 可得

$$c_1^{(2)}(x, y) = \int_{-\infty}^x e^{2iz(x-y)} p(y) dy, \quad c_2^{(1)}(x, y) = \int_{-\infty}^x e^{2iz(x-y)} q(y) c_1^{(2)} dy \quad (2.2.16)$$

又由 $u(x) \geq 0, v(x) \geq 0$, 有 $c_1^{(2)} \leq v(x)$

$$\begin{aligned} |c_2^{(1)}(x, y)| &\leq \int_{-\infty}^x |q| c_1^{(2)}(y, z) dy \leq \int_{-\infty}^x |q| v(y) dy = \int_{-\infty}^x v'(y) u(y) dy \\ &= u(x) v(x) - \int_{-\infty}^x u'(y) v(y) dy \leq u(x) v(x) \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

进而可得

$$\begin{aligned} |c_3^{(2)}(x, z)| &\leq \int_{-\infty}^x |p| c_2^{(1)}(y, z) dy \leq \int_{-\infty}^x |p| u(y) v(y) dy \\ &\leq \int_{-\infty}^x u'(y) u(y) v(y) dy = \frac{1}{2} u^2(x) v(x) - \int_{-\infty}^x \frac{1}{2} u^2(x) v'(x) dy \leq \frac{1}{2} u^2(x) v(x) \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

不妨设对于 $k \leq l$ 时满足 $|c_{2l+1}^{(2)}| \leq \frac{u^{l+1}(x)}{(l+1)!} \frac{v^l(x)}{l!}$, $|c_{2l}^{(1)}| \leq \frac{u^l(x)}{l!} \frac{v^l(x)}{l!}$, 下证对于 $k = l+1$ 仍成立, 利用 (2.2.13) 式可得

$$|c_{2l+2}^{(1)}| \leq \int_{-\infty}^x |q(y)| \frac{u^{l+1}(y)}{(l+1)!} \frac{v^l(y)}{l!} dy \leq \int_{-\infty}^x v'(y) \frac{u^{l+1}(y)}{(l+1)!} \frac{v^l(y)}{l!} dy = \frac{u^{l+1}}{(l+1)!} \frac{v^{l+1}}{(l+1)!} \quad (2.2.19)$$

及

$$|c_{2l+3}^{(2)}| \leq \int_{-\infty}^x |p(y)| \frac{u^{l+1}(y)}{(l+1)!} \frac{v^l(y)}{l!} dy \leq \int_{-\infty}^x u'(y) \frac{u^{l+1}(y)}{(l+1)!} \frac{v^l(y)}{l!} dy = \frac{u^{l+2}}{(l+2)!} \frac{v^{l+1}}{(l+1)!} \quad (2.2.20)$$

从而上述 (2.2.12) 式得证. 注意到 $|q(x)| = |p(x)|$, 则 $v(x) = u(x)$, 故 (2.2.12) 式可简化为

$$|c_{2n+1}^{(2)}| \leq \frac{u^{2n+1}}{n!(n+1)!}, \quad |c_{2n}^{(1)}| \leq \frac{u^{2n}}{n!n!} \quad (2.2.21)$$

当 $q \in L^1(\mathbb{R})$ 时, 有 $u(x)$ 的上述级数均收敛, 故 Neumann 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x, z)$ 绝对收敛, 此时 μ_1^+ 在 $\text{Im}z > 0$ 上解析, 且在 $\text{Im}z \geq 0$ 上连续.

Step2. 解的唯一性: 不妨设 $\tilde{\mu}_1^+$ 为方程 (2.2.8) 的另一个解, 不妨设 $h = \mu_1^+ - \tilde{\mu}_1^+$, 则有

$$\|h(x, t, z)\| = \left\| \int_{-\infty}^x \begin{pmatrix} 1 \\ e^{iz(x-y)} \end{pmatrix} P h dy \right\| \leq 4 \int_{-\infty}^x |q| \|h\| dy \quad (2.2.22)$$

由 Grönwall 不等式可得 $h = 0$, 故 μ_1^+ 为方程的唯一解, 同理可得 μ_1^- 的解析性. $\square$

所以可得 μ_1^+, μ_1^- 分别在 $\mathbb{C}_+, \mathbb{C}_-$ 上解析. 同理可得 μ_2 的第一二列分别在 $\mathbb{C}_-, \mathbb{C}_+$ 上解析. 记作

$$\mu_2 = \begin{pmatrix} \mu_2^{(11)} & \mu_2^{(12)} \\ \mu_2^{(21)} & \mu_2^{(22)} \end{pmatrix} = (\mu_2^-, \mu_2^+)$$

由 (2.2.6) 可知, μ_1, μ_2 可逆, 且逆矩阵为其伴随阵, 另外基于 μ_1, μ_2 的列向量函数的解析性, 可得 μ_1^{-1} 的第一二行在 $\mathbb{C}_-, \mathbb{C}_+$ 上解析, μ_2^{-1} 的第一二行在 $\mathbb{C}_+, \mathbb{C}_-$ 上解析. 记为

$$\mu_1^{-1} = \begin{pmatrix} \mu_1^{(22)} & -\mu_1^{(21)} \\ -\mu_1^{(12)} & \mu_1^{(11)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\hat{\mu}_1^+ \\ \hat{\mu}_1^- \end{pmatrix}, \quad \mu_2^{-1} = \begin{pmatrix} \mu_2^{(22)} & -\mu_2^{(21)} \\ -\mu_2^{(12)} & \mu_2^{(11)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\hat{\mu}_2^+ \\ \hat{\mu}_2^- \end{pmatrix} \quad (2.2.23)$$

利用 (2.2.4), (2.2.7), (2.2.23) 可得谱函数 $S(z)$ 的解析性

$$S(z) = \mu_2^{-1} \mu_1 = \begin{pmatrix} -\hat{\mu}_2^+ \\ \hat{\mu}_2^- \end{pmatrix} (\mu_1^+, \mu_1^-) = \begin{pmatrix} -\hat{\mu}_2^+ \mu_1^+ & -\hat{\mu}_2^+ \mu_1^- \\ \hat{\mu}_2^- \mu_1^+ & \hat{\mu}_2^- \mu_1^- \end{pmatrix} \quad (2.2.24)$$

可见 $s_{11}(z)$ 在 $\mathbb{C}_+$ 解析, $s_{22}(z)$ 在 $\mathbb{C}_-$ 解析, s_{12}, s_{21} 在 $\mathbb{C}_+, \mathbb{C}_-$ 均不解析, 但连续到边界.

2.2.2 对称性

定理 2.1

如上构造的特征函数 μ_1, μ_2 与谱函数 $S(z)$ 具有如下对称性

$$\mu_j^\dagger(x, t, z^*) = \mu_j^{-1}(x, t, z), \quad S^\dagger(z^*) = S^{-1}(z) \quad (j = 1, 2) \quad (2.2.25)$$

证明 由 (2.1.11) 有

$$\mu_{j,x}(x, t, z) = iz[\sigma_3, \mu_j(x, t, z)] = P\mu_j(x, t, z) \quad (2.2.26)$$

将 z 替换为 z^* , 并在两边同时取 Hermite 共轭, 则有

$$\mu_{j,x}^\dagger(x, t, z^*) + iz[\sigma_3, \mu_j^\dagger(x, t, z^*)] = \mu_j^\dagger(x, t, z^*)P^\dagger \quad (2.2.27)$$

由于 $P^\dagger = -P$, 故上式可化为

$$\mu_{j,x}^\dagger(x, t, z^*) + iz[\sigma_3, \mu_j^\dagger(x, t, z^*)] = -\mu_j^\dagger(x, t, z^*)P \quad (2.2.28)$$

另外对于 $\mu_j \cdot \mu_j^{-1} = I$ 对 x 求偏导有

$$\mu_{j,x} \mu_j^{-1} + \mu_j \mu_{j,x}^{-1} = 0 \implies \mu_{j,x}^{-1} = -\mu_j^{-1} \mu_{j,x} \mu_j^{-1} \quad (2.2.29)$$

将 (2.2.26) 带入上式有

$$\mu_{j,x}^{-1} = -\mu_j^{-1}(P\mu_j(x, t, z) - iz[\sigma_3, \mu_j(x, t, z)])\mu_j^{-1}(x, t, z) \implies \mu_{j,x}^{-1} + iz[\sigma_3, \mu_j^{-1}] = \mu_j^{-1}P \quad (2.2.30)$$

由 (2.2.8), (2.2.10) 可得 $\mu_j^\dagger, \mu_j^{-1}$ 满足相同的一次线性微分方程, 具有相同的渐进性, 又因为

$$\mu_j^\dagger(x, t, z^*), \mu_j^{-1}(x, t, z) \rightarrow I, \quad |x| \rightarrow \infty \quad (2.2.31)$$

因此两者相等, 得到对称关系 $\mu_j^\dagger(x, t, z^*) = \mu_j^{-1}(x, t, z), (j = 1, 2)$. 接下来考虑 S 的对称性, 将 (2.2.4) 式改写为

$$S(z) = e^{i\theta(z)\hat{\sigma}_3}(\mu_2^{-1}\mu_1) = \hat{E}(\mu_2^{-1}\mu_1) \quad (2.2.32)$$

由 (2.2.31) 可得如下

$$S(z^*)^\dagger = e^{i\theta(z^*)\sigma_3}(\mu_2^{-1}\mu_1)e^{-i\theta(z^*)} = E\mu_2^{-1}\mu_1E^{-1} = E\mu_1^\dagger(\mu_2^{-1})^\dagger E^{-1} = E\mu_1^\dagger\mu_2E^{-1} = S(z)^{-1} \quad (2.2.33)$$

比较对应元素, 有

$$s_{11}^*(z^*) = s_{22}(z), s_{12}^*(z^*) = -s_{21}(z) \quad (2.2.34)$$

□

2.3 相关的 RH 问题

2.3.1 规范 RH 问题

基于第 2.2 节的结论, 我们构造 RH 问题, 引入记号

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix} \quad (2.3.1)$$

并定义两个矩阵

$$\begin{aligned} P_+(x, t, z) &= \mu_1 H_1 + \mu_2 H_2 = \begin{pmatrix} \mu_1^{(11)} & \mu_2^{(12)} \\ \mu_1^{(21)} & \mu_2^{(22)} \end{pmatrix} = (\mu_1^+, \mu_2^+) \\ P_-(x, t, z) &= H_1 \mu_1^{-1} + H_2 \mu_2^{-1} = \begin{pmatrix} \mu_1^{(22)} & -\mu_1^{(12)} \\ -\mu_2^{(21)} & \mu_2^{(11)} \end{pmatrix} = (\hat{\mu}_1^-, \hat{\mu}_2^-) \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

则由 $\mu_j, \mu_j^{-1} (j = 1, 2)$ 的解析性与渐进性, 直接可得 P_+ 在 $\mathbb{C}_+$ 上解析, P_- 在 $\mathbb{C}_-$ 上解析, 且具有如下渐进性

$$P_+, P_- \rightarrow I \quad |x| \rightarrow \infty \quad (2.3.3)$$

由此可证明如下对称关系

定理 2.2

$P_+(x, t, z), P_-(x, t, z)$ 具有如下对称性

$$P_+^\dagger(x, t, z^*) = P_-(x, t, z) \quad (2.3.4)$$

证明 利用 (2.2.31) 可得

$$\begin{aligned} P_+^\dagger(x, t, z^*) &= (\mu_1(x, t, z)H_1 + \mu_2(x, t, z)H_2)^\dagger = H_1 \mu_1^\dagger(z^*) + H_2 \mu_2^\dagger(z^*) \\ &= H_1 \mu_1^{-1}(x, t, z) + H_2 \mu_2^{-1}(x, t, z) = P_-(x, t, z) \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

□

定义 2.1

概括上面结果, 我们可以得到下面 RH 问题

$$P_\pm(x, t, z) \in C(\mathbb{C}_\pm) \quad (2.3.6)$$

$$P_- P_+ = G(x, t, z) \quad z \in \mathbb{R} \quad (2.3.7)$$

$$P_\pm \rightarrow I \quad z \rightarrow \infty \quad (2.3.8)$$

其中跳跃矩阵为

$$G(x, t, z) = \hat{E}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -S_{12}(z) \\ S_{21}(z) & 1 \end{pmatrix} \quad (2.3.9)$$

进一步 NLS 方程的解 $q(x, t)$ 可由 RH 问题的解给出

$$q(x, t) = 2i \lim_{z \rightarrow \infty} (z P_+)_{12} = 2i (P_+^{(1)})_{12} \quad (2.3.10)$$

其中 $P_+ = I + \frac{P_+^{(1)}}{z} + O(z^{-2})$

证明 只需证明跳跃关系即可, 注意到 $\hat{E} H_j = H_j, (j = 1, 2)$ 可得

$$\begin{aligned} G &= P_- P_+ = (H_1 \mu_1^{-1} + H_2 \mu_2^{-1})(\mu_1 H_1 + \mu_2 H_2) \\ &\stackrel{(2.2.4)}{=} [H_1(\hat{E}^{-1} S^{-1}) \mu_2^{-1} + H_2 \mu_2^{-1}][\mu_2(\hat{E}^{-1} S) H_1 + \mu_2 H_2] \\ &= \hat{E}^{-1} [(H_1 S^{-1} + H_2)(S H_1 + H_2)] = \hat{E}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -S_{12}(z) \\ S_{21}(z) & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

直接计算可得

$$\begin{aligned}\det(P_+) &= \det(\mu_1 H_1 + \mu_2 H_2) = \det(\mu_2 \hat{E}^{-1} S) H_1 + \mu_2 H_2 \\ &= \det(\mu_2) \det((\hat{E}^{-1} S) H_1 + \mu_2 H_2) = s_{11}(z)\end{aligned}\quad (2.3.12)$$

同理, 有 $\det(P_-) = s_{22}(z)$ □

2.3.2 RH 问题的可解性

下面分两种情况讨论 RH 问题 (2.3.6) - (2.3.8) 的解

Case1. 如果

$$\det P_{\pm}(z) \neq 0 (\forall z \in \mathbb{C}), \quad (2.3.13)$$

则称 RH 问题 (2.3.6) - (2.3.8) 为正则的, 将方程 (2.3.7) 改写为

$$P_+^{-1} - P_- = (I - G)P_+^{-1} := \hat{C}P_+^{-1} \quad (2.3.14)$$

由 Plemelj 公式可得

$$P_+ = I + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{C}(x, t, z) P_+^{-1}(x, t, z)}{s - z} ds, \quad z \in \mathbb{C}_+ \quad (2.3.15)$$

Case2. 如果条件 (2.3.13) 不满足, 则称 RH 问题为非正则的, 假设 $\det P_{\pm}$ 在某些离散的点处为零, 由谱函数对称性 (2.2.34) 有

$$\det P_+(z) = s_{11}(z) = s_{22}^*(z^*) = \det P_-^*(z^*) = \det P_-(z^*) \quad (2.3.16)$$

故

$$\det P_+(z) = 0 \iff \det P_-(z^*) = 0, \quad (2.3.17)$$

因此 $\det P_+(z)$ 与 $\det P_-(z)$ 有相同的零点个数, 且彼此共轭. 即若设 $z_j (j = 1, 2, \dots, N)$ 为 $\det P_+(z)$ 在 $\mathbb{C}_+$ 上的单零点, 则 $z_j^* (j = 1, 2, \dots, N)$ 为 $\det P_-(z)$ 在 $\mathbb{C}_-$ 上的单零点.

由于 $\det P_+(z_j) = \det P_-(z_j^*) = 0$, 假设 w_j, w_j^* 分别为下列线性方程组的解

$$P_+(z_j)w_j(z_j) = 0, \quad w_j^*(z_j^*)P_-(z_j^*) = 0 \quad (2.3.18)$$

对上式取共轭转置, 则有 $w_j^\dagger(z_j)P_+^\dagger(z_j) = 0$, 再利用对称性 (2.3.4) 有

$$w_j^\dagger(z_j)P_-(z_j^*) = 0 \quad (2.3.19)$$

比较可得 $w_j^\dagger(z) = w_j^*(z^*)$.

非正则 RH 问题 (2.3.6) - (2.3.8) 的解可由下面定理给出

定理 2.3 (Zakharov, Shabat, 1979)

带有零点结构 (2.3.18) 的非正则 RH 问题 (2.3.6) - (2.3.8) 可分解为

$$P_+(z) = \hat{P}_+(z)\Gamma(z), \quad P_-(z) = \Gamma^{-1}(z)\hat{P}_-(z) \quad (2.3.20)$$

其中

$$\Gamma(z) = I + \sum_{k,j=1}^N \frac{w_k(M^{-1})_{kj}w_j^*}{z - z_j^*}, \quad \Gamma(z)^- = I - \sum_{k,j=1}^N \frac{w_k(M^{-1})_{kj}w_j^*}{z - z_k} \quad (2.3.21)$$

这里 M 为 $N \times N$ 矩阵, 其 (k, j) 元素由下式给定

$$M_{kj} = \frac{w_k^* w_j}{z_k^* - z_j}, \quad k, j = 1, 2, \dots, N, \quad \det \Gamma(z) = \prod_{k=1}^N \frac{z - z_k}{z - z_k^*} \quad (2.3.22)$$

而 $\hat{P}_{\pm}$ 为正则 RH 问题的唯一解, 且

1. $\hat{P}_{\pm}$ 在 $\mathbb{C}_+$ 上解析,
2. $\hat{P}_- \hat{P}_+ = \Gamma(z) G \Gamma^{-1}(z), z \in \mathbb{R}$

$$3. \hat{P}_{\pm}(z) \rightarrow I, \quad z \rightarrow \infty,$$

证明 非正则 RH 问题 (2.3.6) - (2.3.8) 是由于 $2N$ 个离散谱上的 $\det P_+(z_j) = \det P_-(z_j^*) = 0 (j = 1, 2, \dots, N)$ 造成的. 所以主要任务是消除这些零点结构, 并且去除 $P_+(z_j), P_-(z_j^*)$ 在 z_j, z_j^* 上的零点结构, 为此需定义单极点矩阵

$$\Gamma_1(z) = I + \frac{z_1^* - z_1}{z - z_1^*} \cdot \frac{w_1 w_1^*}{w_1^* w_1} \quad (2.3.23)$$

其具有如下性质

$$\begin{aligned} F_1^{-1}(z) &= I - \frac{z_1^* - z_1}{z - z_1} \cdot \frac{w_1 w_1^*}{w_1^* w_1} \\ \det \Gamma_1(z) &= \frac{z - z_1}{z - z_1^*}, \quad \det \Gamma_1^{-1}(z) = \frac{z - z_1^*}{z - z_1} \\ \Gamma_1(z_1) w_1 &= w_1 + \frac{z_1^* - z_1}{z_1 - z_1^*} \cdot \frac{w_1 w_1^*}{w_1^* w_1} \cdot w_1 = \frac{z_1^* - z_1}{z_1 - z_1^*} \frac{w_1 (w_1^* w_1)}{w_1^* w_1} = w_1 - w_1 = 0 \\ w_1^* \Gamma_1^{-1}(z_1^*) &= w_1^* - \frac{z_1^* - z_1}{z_1^* - z_1} \cdot \frac{w_1^* w_1}{w_1^* w_1} \cdot w_1^* = w_1^* - w_1^* = 0 \end{aligned} \quad (2.3.24)$$

令 $x_j = \frac{w_1 w_1^*}{w_1^* w_1}$, 则 x_j 为投影算子, 即 $x_j^2 = x_j$, 由上定义知 x_j 为一阶矩阵, 故与矩阵 $\text{diga}\{1, 0\}$ 相似, 既有可逆阵 T_j 使得 $T_j^{-1} x_j T_j = \text{diag}\{1, 0\}$, 从而有

$$\Gamma_1(z) = \det \left(I + \frac{z_1^* - z_1}{z - z_1^*} T_j^{-1} X_j T_j \right) = \begin{vmatrix} 1 + \frac{z_1^* - z_1}{z - z_1^*} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{z - z_1}{z - z_1^*} \quad (2.3.25)$$

定义矩阵函数 $R_1^+(z) = P_+(z) \Gamma_1^{-1}(z)$, $R_1^-(z) = \Gamma_1(z) P_-(z)$, 由 (2.3.18) - (2.3.19) 知

$$\begin{aligned} \text{Res}_{z=z_1} R_1^+(z) &= \text{Res}_{z=z_1} \left(P_+(z) - P_+(z) \frac{z_1^* - z_1}{z - z_1} \frac{w_1 w_1^*}{w_1^* w_1} \right) = -\frac{z_1^* - z_1}{w_1 w_1^*} (P_+(z) w_1) w_1^* = 0 \\ \text{Res}_{z=z_1^*} R_1^-(z) &= \text{Res}_{z=z_1^*} \left(P_1(z) + \frac{z_1^* - z_1}{z - z_1} \frac{w_1 w_1^*}{w_1^* w_1} P_-(z) \right) = -\frac{z_1^* - z_1}{w_1^* w_1} w_1 (w_1^* P_-(z_1^*)) = 0 \end{aligned} \quad (2.3.26)$$

因此 $R_1^+(z), R_1^-(z)$ 分别在 $\mathbb{C}_+, \mathbb{C}_-$ 上解析, 且

$$\begin{aligned} \det R_1^+(z_1) &= \lim_{z \rightarrow z_1} [\det P_+(z) \cdot \det \Gamma_1^{-1}(z)] = \lim_{z \rightarrow z_1} s_{11}(z) \frac{z - z_1^*}{z - z_1} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{s_{11}(z) - s_{11}(z_1)}{z - z_1} (z - z_1^*) \Leftarrow (s_{11}(z) = 0) \\ &= \lim_{z \rightarrow z_1} s'_{11}(z) (z - z_1^*) = 0 \end{aligned} \quad (2.3.27)$$

$$\det R_1^-(z_1^*) = \lim_{z \rightarrow z_1^*} [\det \Gamma_1(z) \cdot \det P_-(z)] = \lim_{z \rightarrow z_1^*} \frac{z - z_1}{z - z_1^*} s_{22}(z) = \lim_{z \rightarrow z_1^*} s'_{22}(z) (z - z_1) = 0$$

这说明 $R_1^+(z), R_1^-(z)$ 分别在 $z = z_1, z = z_1^*$ 不再具有零点结构, 然后去除其在 z_2, z_2^* 上的零点结构, 由于

$$\begin{aligned} \det R_1^+(z_2) &= \det P_+(z_2) \det \Gamma_1^{-1}(z_2) = s_{11}(z_2) \frac{z_2 - z_1^*}{z_2 - z_1} = 0 \\ \det R_1^-(z_2^*) &= \det \Gamma_1(z_2^*) \det P_-(z_2^*) = \frac{z_2^* - z_1}{z_2^* - z_1} s_{22}(z_2^*) = 0 \end{aligned} \quad (2.3.28)$$

因此, 下列齐次线性方程组有非零解, 即存在 $v_2(z_2), v_2^*(z_2^*)$, 使得

$$R_1^+(z_2) v(z_2) = P_+(z_2) \Gamma_1^{-1}(z_2) v(z_2) = 0, \quad v_2^*(z_2^*) R_1^-(z_2^*) = v_2^*(z_2^*) \Gamma_1(z_2^*) P_-(z_2^*) = 0 \quad (2.3.29)$$

与 (2.3.18) 比较可得

$$w_2(z_2) = \Gamma_1^{-1}(z_2) v_2(z_2), \quad w_2^*(z_2^*) = v_2^*(z_2^*) \Gamma_1(z_2^*) \quad (2.3.30)$$

为去除 $R_1^+(z_2), R_1^-(z_2^*)$ 在 z_2, z_2^* 上的零点结构, 令

$$\begin{aligned}\Gamma_2(z) &= I + \frac{z_2^* - z_2}{z - z_2^*} \cdot \frac{v_2 v_2^*}{v_2^* v_2}, \quad \det \Gamma_2(z) = \frac{z - z_2}{z - z_2^*} \\ \Gamma_2^{-1}(z) &= I - \frac{z_2^* - z_2}{z - z_2} \cdot \frac{v_2 v_2^*}{v_2^* v_2}, \quad \det \Gamma_2^{-1}(z) = \frac{z - z_2^*}{z - z_2}\end{aligned}\quad (2.3.31)$$

$$\begin{aligned}R_2^+(z) &= P_1^+(z) \Gamma_2^{-1}(z) = P_1^+(z) \Gamma_1^{-1}(z) \Gamma_2^{-1}(z) \\ R_2^{-1}(z) &= \Gamma_2(z) P_1^{-1}(z) = \Gamma_2(z) \Gamma_1(z) P_1^{-1}(z)\end{aligned}$$

则

$$\operatorname{Res}_{z=z_2} R_2^+(z) = \operatorname{Res}_{z=z_2} \left[\left(P_+(z) - P_+(z) \frac{z_1^* - z_1}{z - z_1} \cdot \frac{w_1 w_1^*}{w_2^* w_1} \right) \left(I - \frac{z_1^* - z_1}{z - z_1} \cdot \frac{w_1 w_1^*}{v_2^* v_1} \right) \right] = -\frac{z_2^* - z_1 R_1(z_2) v_2 v_2^*}{v_2^* v_2} \quad (2.3.32)$$

同理 $\operatorname{Res}_{z=z_2^*} R_2^{-1}(z) = 0$, 由此可得 $R_2^+(z), R_2^{-1}(z)$ 分别在在 $z = z_1, z_2, z = z_1^*, z_2^*$ 上无零点结构, 则

$$\begin{aligned}\det R_2^+(z_j) &= \lim_{z \rightarrow z_j} [\det P_+(z) \det \Gamma_1^{-1}(z) \det \Gamma_2^{-1}(z)] \\ &= \lim_{z \rightarrow z_j} S_{11}(z) \frac{z - z_1^*}{z - z_1} \cdot \frac{z - z_2^*}{z - z_2} \\ &= s'_{11}(z_j) \frac{(z_j - z_1^*)(z_j - z_2^*)}{z_j - z_k} \neq 0\end{aligned}\quad (2.3.33)$$

$$\det R_2^-(z_j^*) \neq 0 \quad (k = 1, 2, k \neq j)$$

更一般的, 可得

$$\begin{aligned}w_j &= \Gamma_1^{-1}(z_j) \cdots \Gamma_{j-1}^{-1}(z_j) \cdot v_j(z_j) \\ w_j^* &= v_j^*(z_j^*) \cdot \Gamma_1(z_j^*) \cdots \Gamma_{j-1}(z_j^*) \\ R_j^+(z) &= P_+(z) \cdot \Gamma_1^{-1}(z) \cdots \Gamma_j^{-1}(z) \\ R_j^{-1}(z) &= \Gamma_j(z) \cdots \Gamma_1(z) \cdot P_-(z)\end{aligned}\quad (2.3.34)$$

其中

$$\Gamma_j(z) = I + \frac{z_j^* - z_j}{z - z_j^*} \cdot \frac{v_j v_j^*}{v_j^* v_j}, \quad \Gamma_j^{-1}(z) = I - \frac{z_j^* - z_j}{z - z_j} \cdot \frac{v_j v_j^*}{v_j^* v_j} \quad (2.3.35)$$

则 $R_j^+(z), R_j^{-1}(z)$ 在 $\mathbb{C}_+, \mathbb{C}_-$ 上解析, 且在 $z_k, z_k^* (k = 1, 2, \dots, j)$ 上无零点结构, 即

$$\begin{aligned}\det R_j^+(z_k) &= s'_{11}(z_k) \frac{\prod_{l=1}^j (z_k - z_l^*)}{\prod_{l=1, l \neq k}^j (z_k - z_l)} \neq 0 \\ \det R_j^{-1}(z_k^*) &= s'_{22}(z_k^*) \frac{\prod_{l=1}^j (z_k^* - z_l)}{\prod_{l=1, l \neq k}^j (z_k^* - z_l)} \neq 0\end{aligned}\quad (k = 1, 2, \dots, j) \quad (2.3.36)$$

而

$$\begin{aligned}\det R_j^+(z_{j+1}) &= s_{11}(z_{j+1}) \prod_{j=1}^j \frac{z_{j+1} - z_k^*}{z_{j+1} - z_k} = 0 \\ \det R_j^{-1}(z_{j+1}^*) &= s_{22}(z_{j+1}^*) \prod_{j=1}^j \frac{z_{j+1}^* - z_k}{z_{j+1}^* - z_k} = 0\end{aligned}\quad (2.3.37)$$

最后令

$$\begin{aligned}\Gamma_z &= \Gamma_N(z) \cdots \Gamma_1(z), \quad \Gamma_z^{-1} = \Gamma_1^{-1}(z) \cdots \Gamma_N^{-1}(z) \\ \hat{P}_+(z) &= P_+(z) \Gamma_z^{-1}(z), \quad \hat{P}_-(z) = \Gamma_z(z) P_-(z)\end{aligned}\quad (2.3.38)$$

则 $\hat{P}_+(z), \hat{P}_-(z)$ 在 $\mathbb{C}_+, \mathbb{C}_-$ 上解析, 且在 $z_j, z_j^* (j = 1, 2, \dots, N)$ 上无零点结构 (实际上在解析区域内无零点结构), 即

$$\det \hat{P}_+(z_k) \neq 0, \quad \det \hat{P}_-(z_k^*) \neq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (2.3.39)$$

得到分解 (2.3.20). 下证 (2.3.21). 注意到 $\Gamma(z), \Gamma^{-1}(z)$ 分别为具有单极点 $z_j, z_j^* (1 \leq j \leq N)$ 的亚纯函数, 以及分解

(2.3.35), (2.3.38), 寻找的向量使得

$$\Gamma(z) = I + \sum_{j=1}^N \frac{\xi_j w_j^*}{z - z_j^*}, \quad \Gamma^{-1}(z) = I - \sum_{j=1}^N \frac{w_j^* \xi_j}{z - z_j} \quad (2.3.40)$$

注意到 $\Gamma(z)\Gamma^{-1}(z) = I$ 对任意 z 都成立, 当然也在 $z = z_k$ 处成立, 即 $\Gamma(z)\Gamma^{-1}(z) = I$ 在 $z = z_k$ 处正则, 为保证 $\Gamma(z)\Gamma^{-1}(z) = I$ 在 $z = z_k$ 处成立, 只需让其留数为 0, 因此利用 (2.3.40) 可得

$$\begin{aligned} 0 = \text{Res}_{z=z_k} [\Gamma(z)\Gamma^{-1}(z)] &= \text{Res}_{z=z_k} \left(\Gamma(z) - \sum_{j=1}^N \Gamma(z) \frac{w_j^* \xi_j}{z - z_j} \right) = -\Gamma(z_k) w_k \xi_k^* \\ &- \left(I + \sum_{j=1}^N \frac{\xi_j w_j^*}{z_k - z_j^*} \right) w_k \xi_k^* = \left(-w_k + \sum_{j=1}^N \frac{w_j^* w_k}{z_j^* - z_k} \xi_j^* \right) \xi_k^* \end{aligned} \quad (2.3.41)$$

对上式两边同时作用 ξ_k , 则有

$$\left(-w_k + \sum_{j=1}^N \frac{w_j^* w_k}{z_j^* - z_k} \xi_j \right) |\xi_k|^2 = 0 \implies -w_k + \sum_{j=1}^N \frac{w_j^* w_k}{z_j^* - z_k} \xi_j = 0 \quad (1 \leq k \leq N) \quad (2.3.42)$$

将上式改写为 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ 的分块矩阵形式的线性方程组, 则有

$$(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) M = (w_1^*, w_2^*, \dots, w_N^*) \quad (2.3.43)$$

其中 $M = (M_{kj})_{N \times N}$, 其中 $M_{kj} = \frac{w_k^* w_j}{z_k^* - z_j}$ 则

$$\begin{cases} \frac{w_1^* w_1}{z_1^* - z_1} \xi_1 + \frac{w_2^* w_1}{z_2^* - z_1} \xi_2 + \dots + \frac{w_N^* w_1}{z_N^* - z_1} \xi_N = w_1 \\ \frac{w_1^* w_2}{z_1^* - z_2} \xi_1 + \frac{w_2^* w_2}{z_2^* - z_2} \xi_2 + \dots + \frac{w_N^* w_2}{z_N^* - z_2} \xi_N = w_2 \\ \vdots \\ \frac{w_1^* w_N}{z_1^* - z_N} \xi_1 + \frac{w_2^* w_N}{z_2^* - z_N} \xi_2 + \dots + \frac{w_N^* w_N}{z_N^* - z_N} \xi_N = w_N \end{cases} \implies M = \begin{pmatrix} \frac{w_1^* w_1}{z_1^* - z_1} & \frac{w_1^* w_2}{z_1^* - z_2} & \dots & \frac{w_1^* w_N}{z_1^* - z_N} \\ \frac{w_2^* w_1}{z_2^* - z_1} & \frac{w_2^* w_2}{z_2^* - z_2} & \dots & \frac{w_2^* w_N}{z_2^* - z_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_N^* w_1}{z_N^* - z_1} & \frac{w_N^* w_2}{z_N^* - z_2} & \dots & \frac{w_N^* w_N}{z_N^* - z_N} \end{pmatrix} \quad (2.3.44)$$

可得 $\xi_j = \sum_{k=1}^N (M^{-1})_{kj} w_k$. 最后将其带入 (2.3.40) 得到 (2.3.21) □

2.4 NLS 方程的 N 孤子解

2.4.1 矩阵向量解的时空演化

对方程 (2.3.18) 第一个式子两边分别对 x, t 求导, 可得

$$P_{+,x} w_j + P_+ w_{j,x} = 0, \quad P_{+,t} w_j + P_+ w_{j,t} = 0 \quad (2.4.1)$$

利用 P_+ 的定义与 Lax 对 (2.1.11), (2.1.12) 可得

$$\begin{aligned} P_{+,x} &= \mu_{1,x} H_1 + \mu_{2,x} H_2 = (iz_j [\sigma_3, \mu_1] + P \mu_1) H_1 + (-iz_j [\sigma_3, \mu_2] + P \mu_2) H_2 \\ &- iz_j (\mu_1 \sigma_3 H_1 - \mu_2 \sigma_3 H_2 + \sigma_3 \mu_1 H_1 + \sigma_3 \mu_2 H_2) + P \mu_1 H_1 + P \mu_2 H_2 \\ &= -iz [\sigma_3, P_+] + P P_+ \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

同理有

$$P_{+,t} = -iz_j^2 [\sigma_3, P_+] + Q P_+ \quad (2.4.3)$$

将 (2.4.2), (2.4.3) 代入 (2.4.1) 且由于 $P_+ w_j = 0, w_j P = 0$, 有

$$(-iz_j [\sigma_3, P_+] + P P_+) w_j + P_+ w_{j,x} = 0 \implies iz_j P_+ \sigma_3 w_j + P_+ w_{j,x} = 0 \implies P_+ (w_{j,x} + iz_j \sigma_3 w_j) = 0 \quad (2.4.4)$$

同理有 $P_+ (w_{j,t} + iz_j^2 \sigma_3 w_j) = 0$.

$$\begin{cases} w_{j,x} + iz_j \sigma_3 w_j = 0 \\ w_{j,t} + iz_j^2 \sigma_3 w_j = 0 \end{cases} \implies w_j = e^{-i\theta(z_j) \sigma_3} w_{j,0}, \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (2.4.5)$$

其中 $w_{j,0}$ 为 2 维常向量, 从而 $w_j^* = w_{j,0}^\dagger e^{i\theta(z_j^*)\sigma_3}$.

2.4.2 N 维孤子解公式

已知 $P_- P_+ = G \implies P_+^{-1} - P_- = \hat{G} P_+$ (其中 $I - G = \hat{G}$), 且 $\hat{P}_-(z) \hat{P}_+(z) = \Gamma(z) G \Gamma^{-1}(z) (z \in \mathbb{R})$, 可得

$$\begin{aligned} \hat{P}_+^{-1} - \hat{P}_- &= (I - \hat{P}_- \hat{P}_+) \hat{P}_+^{-1} = \left(I - \Gamma(z) G \Gamma^{-1}(z) \right) \hat{P}_+^{-1} = (\Gamma(z) \Gamma^{-1}(z) - \Gamma(z) G \Gamma^{-1}(z)) \hat{P}_+^{-1} \\ &= \Gamma(z) (I - G) \Gamma^{-1}(z) \hat{P}_+^{-1} = \Gamma(z) \hat{G} \Gamma^{-1}(z) \hat{P}_+^{-1} \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

由 Taylor 公式 $\frac{1}{s-z} = -\frac{1}{z} \left(\frac{1}{1-s/z} \right) = -\frac{1}{z} \left(1 + \frac{s}{z} + \dots \right)$, 故 Plemelj 公式可写为

$$\begin{aligned} \hat{P}_+^{-1} &= I + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Gamma(z) \hat{G} \Gamma^{-1}(z) \hat{P}_+^{-1}}{s-z} ds \\ &= I - \frac{1}{2\pi i z} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + \frac{s}{z} + \left(\frac{s}{z} \right)^2 + \dots \right) \Gamma(z) \hat{G} \Gamma^{-1}(z) \hat{P}_+^{-1} ds \\ &= I - \frac{1}{2\pi i z} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(z) \hat{G} \Gamma^{-1}(z) \hat{P}_+^{-1} ds + O(z^{-2}) \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

由 $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \dots$, $(P^{-1} = I + \frac{A}{z} + \dots, P = \frac{B}{z} + \dots)$, 可得

$$\hat{P}_+ = I + \frac{1}{2\pi i z} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(z) \hat{G} \Gamma^{-1}(z) \hat{P}_+ ds + O(z^{-2}) \quad (2.4.8)$$

再由

$$\Gamma(z) = I + \sum_{k,j=1}^N \frac{w_k (M^{-1})_{kj} w_j^*}{z - z_j^*} \implies \Gamma(z) = I + \frac{1}{z} \sum_{k,j=1}^N w_k (M^{-1})_{kj} w_j^* + O(z^{-2}) \quad (2.4.9)$$

将上渐进式带入 (2.3.20), 比较 z^{-1} 的次数可得

$$P_+^{(1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(z) \hat{G} \Gamma^{-1}(z) \hat{P}_+^{-1} ds = \sum_{k,j=1}^N w_k (M^{-1})_{kj} w_j^* \quad (2.4.10)$$

特别的, 当散射数据 $S_{12} = S_{21} = 0$ 时, 有 $\hat{G} = I - G = 0$. 故上式 (2.4.10) 可简化为

$$P_+^{-1} = \sum_{k,j=1}^N w_k (M^{-1})_{kj} w_j^* \quad (2.4.11)$$

不妨取 $\lambda_j = -i(z_j x + 2z_j^2 t)$, 并取 $w_{j,0} = (c_j, 1)^T$, 则有

$$w_j = \begin{pmatrix} e^{\lambda_j} \\ e^{-\lambda_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_j \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_j e^{\lambda_j} \\ e^{-\lambda_j} \end{pmatrix} \quad (2.4.12)$$

从而 $w_j^* = w_{j,0}^* \cdot e_j^{\lambda} \sigma_3 = (c_j^* e^{\lambda_j^*}, e^{-\lambda_j})$. 故

$$M_{k,j} = \frac{w_k^* w_j}{z_k^* - z_j} = \frac{1}{z_k^* - z_j} (c_k^* c_j e^{\lambda_k^* + \lambda_j} + e^{-\lambda_k - \lambda_j}) \quad (2.4.13)$$

再由 (2.4.9)

$$\begin{aligned} q(x, t) &= 2i \lim_{z \rightarrow \infty} (z P_+)_{12} = 2i (P_+^{(1)})_{12} \\ &= 2i \sum_{k,j}^N (w_k w_j^*)_{12} (M^{-1})_{kj} = 2i \sum_{k,j}^N c_k e^{\lambda_k - \lambda_j^*} (M^{-1})_{kj} \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

令

$$R = \begin{pmatrix} 0 & c_1 e^{\lambda_1} & \dots & c_N e^{\lambda_N} \\ e^{-\lambda_1^*} & M_{11} & \dots & M_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-\lambda_N^*} & M_{N1} & \dots & M_{NN} \end{pmatrix} \quad (2.4.15)$$

则

$$\begin{aligned}
\det R &= \sum_{k=1}^N (-1)^{k+2} c_k e^{\lambda_k} \det \begin{pmatrix} e^{-\lambda_1^*} & M_{11} & \cdots & M_{1,k-1} & M_{1,k+1} & \cdots & M_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-\lambda_N^*} & M_{N1} & \cdots & M_{N,k-1} & M_{N,k+1} & \cdots & M_{NN} \end{pmatrix} \\
&= \sum_{k=1}^N (-1)^{k+2} c_k e^{\lambda_k} \sum_{j=1}^N e^{-\lambda_j^*} \det \begin{pmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1,k-1} & M_{1,k+1} & \cdots & M_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{N1} & \cdots & M_{N,k-1} & M_{N,k+1} & \cdots & M_{NN} \end{pmatrix} := \Delta \\
&= \sum_{k=1}^N (-1)^{k+j+3} c_k e^{\lambda_k - \lambda_j^*} \det(\Delta) \\
&= -c_k e^{\lambda_k - \lambda_j^*} (M^*)_{jk} \Leftrightarrow \left((M^*)_{jk} - (-1)^{k+j} \det(\Delta) \right) \\
&= -\det M \sum c_k e^{\lambda_k - \lambda_j^*} \Leftrightarrow \left((M^{-1})_{jk} (M^*) = \det(M) M^{-1} \right)
\end{aligned} \tag{2.4.16}$$

因此

$$\sum_{k=1}^N c_k e^{\lambda_k - \lambda_j^*} (M^{-1})_{jk} = -\frac{\det R}{\det M} \tag{2.4.17}$$

将 (2.4.17) 代入 (2.4.14) 可得 NLS 方程的 N 孤子解

$$q = -2i \frac{\det R}{\det M} \tag{2.4.18}$$

第3章 利用 RH 对称性求解非局部 NLS 方程

本章节我们考虑非局部 NLS 方程的三种逆问题, 主要参考杨建科老师的文章 [3]. 在正式开始之前, 我们需要先介绍耦合方程 (coupled equations) 和非局部方程 (nonlocal equations) 的定义.

定义 3.1 (耦合方程)

若一系统由两个或多个相互依赖的场函数组成, 例如

$$iq_t + q_{xx} - 2q^2 r = 0, \quad ir_t - r_{xx} - 2r^2 q = 0, \quad (3.0.1)$$

其中 $q(x, t)$ 与 $r(x, t)$ 为彼此耦合的复函数, 则称该系统为一组耦合方程.

定义 3.2 (非局部方程)

若方程中某个场函数在空间或时间反演后仍与原场发生耦合, 如 $r(x, t) = \sigma q(\epsilon_1 x, \epsilon_2 t)$ 或 $\sigma q^*(\epsilon_1 x, \epsilon_2 t)$, 其中 $\epsilon_i = \pm 1$, 且不同时为 1, $\sigma = \pm 1$, 且则所得单个方程称为非局部方程.

3.1 非局部 NLS 方程及其约化

考虑非局部 NLS 方程

$$iq_t + q_{xx} - 2q^2 r = 0, \quad ir_t - r_{xx} - 2r^2 q = 0, \quad (3.1.1)$$

其中 $r(x, t)$ 为 $q(x, t)$ 的某种约化形式. 考曲率方程可得如下四种约化,

$$r(x, t) = -q^*(x, t), \quad (3.1.2)$$

$$r(x, t) = -q^*(-x, t), \quad (3.1.3)$$

$$r(x, t) = -q(x, -t), \quad (3.1.4)$$

$$r(x, t) = -q(-x, -t), \quad (3.1.5)$$

分别带入上面约化, 我们得到局部 NLS 方程

$$iq_t(x, t) + q_{xx}(x, t) + 2q^2(x, t)q^*(x, t) = 0, \quad (3.1.6)$$

逆空间 NLS 方程

$$iq_t(x, t) + q_{xx}(x, t) + 2q^2(x, t)q^*(-x, t) = 0, \quad (3.1.7)$$

逆时间 NLS 方程

$$iq_t(x, t) + q_{xx}(x, t) + 2q^2(x, t)q^*(x, -t) = 0, \quad (3.1.8)$$

和逆时空 NLS 方程

$$iq_t(x, t) + q_{xx}(x, t) + 2q^2(x, t)q^*(-x, -t) = 0. \quad (3.1.9)$$

3.2 耦合 NLS 方程的 N 孤子解

我们推导反空间, 反时间和反时空 NLS 方程 (3.1.7)-(3.1.9) 的 N 孤子解的基本思路是承认这些方程是耦合 NLS (3.1.1) 的约化形式. 为此我们只需利用 RH 方法先求出耦合 NLS 方程 N 孤子解的形式, 然后对 Lax 对施加对应的约化条件, 则可得到对应的非局部 NLS 方程的 N 孤子解. 具体地, 我们考虑耦合 NLS 方程 (3.1.1), 其 Lax 对为:

$$Y_x = MY = i\zeta\sigma_3 + Q, \quad (3.2.1)$$

$$Y_t = NY = -2i\zeta^2\sigma_3 + R, \quad (3.2.2)$$

其中 $R = -2i\zeta^2\sigma_3 + 2\zeta Q - i(Q^2 + Q_x)\sigma_3$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & q(x, t) \\ r(x, t) & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.2.3)$$

利用 RH 方法, 我们得到耦合 NLS 方程 (3.1.1) 的 N 孤子解可以显式地写为

$$q(x, t) = -2i \frac{\det F}{\det M}, \quad r(x, t) = 2i \frac{\det G}{\det M} \quad (3.2.4)$$

其中 M 是一个 $N \times N$ 矩阵, F, G 是 $(N+1) \times (N+1)$ 矩阵. 矩阵 M 的元素 M_{jk} 由下式给出:

$$M_{jk} = \frac{\bar{v}_j v_k}{\bar{\zeta}_j - \zeta_k}, \quad v_k(x, t) = e^{\theta_k \Lambda} v_{k0}, \quad \bar{v}_k(x, t) = \bar{v}_{k0} e^{\bar{\theta}_k \Lambda} \quad (3.2.5)$$

其中 $\zeta_k \in \mathbb{C}_+$, $\bar{\zeta}_k \in \mathbb{C}_-$ 是特征值, $v_{k0} = (a_k, b_k)^T$, $\bar{v}_{k0} = (\bar{a}_k, \bar{b}_k)$ 是对应的特征向量, 若记 $\theta_k = -i\zeta_k x - 2i\zeta_k^2 t$, $\bar{\theta}_k = i\bar{\zeta}_k x + 2i\bar{\zeta}_k^2 t$, 则

$$F = \begin{pmatrix} 0 & a_1 e^{\theta_1} & \cdots & a_N e^{\theta_N} \\ \bar{b}_1 e^{-\bar{\theta}_1} & M_{11} & \cdots & M_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{b}_N e^{-\bar{\theta}_N} & M_{N1} & \cdots & M_{NN} \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & b_1 e^{-\bar{\theta}_1} & \cdots & b_N e^{-\bar{\theta}_N} \\ \bar{a}_1 e^{\theta_1} & M_{11} & \cdots & M_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_N e^{\theta_N} & M_{N1} & \cdots & M_{NN} \end{pmatrix} \quad (3.2.6)$$

3.3 非局部 NLS 方程的对称关系

我们首先给出逆空间 NLS 方程 (3.1.7) 和逆时间 NLS 方程 (3.1.8) 的散射数据的对称关系. 逆时空 NLS 方程 (3.1.9) 的散射数据的对称关系可以用类似的方法得到.

3.3.1 逆空间 NLS 方程

定理 3.1

对于逆空间方程 (3.1.7), 若 ζ 是一个特征值, 则 $-\zeta^*$ 也是一个特征值. 因此, 非纯虚特征值成对出现, 即 $(\zeta, -\zeta^*)$, 且它们位于复平面的同一半平面上. 特征向量的对称关系如下:

1. 若 $(\zeta_k, \hat{\zeta}_k) \in \mathbb{C}_+$, 则 $\hat{\zeta}_k = -\zeta_k^*$, 它们的列特征向量满足关系 $\hat{v}_{k0} = \sigma_1 v_{k0}^*$.
2. 若 $\zeta_k \in i\mathbb{R}_+$, 其特征向量为 $v_{k0} = (1, e^{i\theta_k})^T$, 其中 θ_k 为实常数.
3. 若 $(\bar{\zeta}_k, \hat{\bar{\zeta}}_k) \in \mathbb{C}_-$, 则 $\hat{\bar{\zeta}}_k = -\bar{\zeta}_k^*$, 它们的行特征向量满足关系 $\hat{v}_{k0} = \bar{v}_{k0}^* \sigma_1$.
4. 若 $\bar{\zeta}_k \in i\mathbb{R}_-$, 其特征向量为 $\bar{v}_{k0} = (1, e^{i\bar{\theta}_k})$, 其中 $\bar{\theta}_k$ 为实常数.



为了证明上述定理, 我们先考虑局部 NLS 方程 (3.1.6), 它是在约化 (3.1.2) 下得到的, 在第二章我们得到它的反散射数据为 $\bar{\zeta}_k = \zeta_k^*$, $\bar{v}_{k0} = v_{k0}^{*T}$.

因此我们可以看到非局部 NLS 和局部 NLS 方程的散射数据的对称关系是不同的. 特别地, 对于逆空间和逆时空 NLS 方程, 上下半平面的特征值是完全独立的. 这种独立性允许出现新的特征值配置, 从而产生新的多孤子解类型. 我们将在下一节详细讨论这些新的类型.

在证明定理 3.1 之前, 我们先建立离散散射数据 $\{\zeta_k, \bar{\zeta}_k, a_k, b_k, \bar{a}_k, \bar{b}_k\} (1 \leq k \leq N)$ 和特征值问题 $Y_x = MY$ 及其伴随问题 $K_x = -KM$ 中的离散特征值的联系, 不妨设

$$Y_x = i\zeta\sigma_3 Y + Q_0 Y, \quad (3.3.1)$$

$$K_x = -i\zeta\sigma_3 K - KQ_0 \quad (3.3.2)$$

其中 $Q_0(x) = Q(x, 0)$, 即在时间 $t = 0$ 时刻的势矩阵.

注 这里使用 $Q_0(x) = Q(x, 0)$ 是因为在空间谱问题中, 时间 t 被视为固定参数, 故选择驻定解. 实际上也可使用时间谱问题求解, 取 $R_0(t) = R(0, t)$, 但过程更加复杂.

对于任意离散散射数据 $\{\zeta_k, a_k, b_k\}$, 其中 $\zeta \in \mathbb{C}_+$ 是特征值问题(3.3.1)的特征值, 其离散特征函数 Y_k 具有如下渐近行为

$$Y_k(x) \rightarrow \begin{bmatrix} a_k e^{-i\zeta_k x} \\ 0 \end{bmatrix}, x \rightarrow -\infty, \quad Y_k(x) \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -b_k e^{i\zeta_k x} \end{bmatrix}, x \rightarrow +\infty \quad (3.3.3)$$

类似地, 对于伴随问题(3.3.2)的特征值 $\bar{\zeta} \in \mathbb{C}_-$, 离散特征函数 K_k 具有以下渐近性

$$K_k(x) \rightarrow \begin{bmatrix} \bar{a}_k e^{-i\bar{\zeta}_k x} & 0 \end{bmatrix}, x \rightarrow -\infty, \quad K_k(x) \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -\bar{b}_k e^{-i\bar{\zeta}_k x} \end{bmatrix}, x \rightarrow +\infty \quad (3.3.4)$$

利用上面渐近行为, 以及对应特征问题(3.3.1)-(3.3.2), 我们可以利用对称关系求解定理 3.1.

证明 逆空间 NLS 方程(3.1.7)是从耦合薛定谔方程(3.1.1)在约化条件(3.1.3)下导出的, 位势矩阵 Q_0 为

$$Q_0 = \begin{pmatrix} 0 & q(x, 0) \\ -q^*(-x, 0) & 0 \end{pmatrix} \quad (3.3.5)$$

明显地, 我们有 $Q_0^*(-x) = -\sigma_1^{-1} Q_0 \sigma_1$, 故

$$\begin{aligned} Y_x &= i\zeta \sigma_3 Y + Q_0 Y \implies -Y_x(-x) = i\zeta \sigma_3 Y(-x) + Q_0(-x)Y(-x) \\ &\implies -Y_{-x}^*(-x) = -i\zeta^* \sigma_3 Y^*(-x) + Q_0^*(-x)Y^*(-x) \\ &\implies -\alpha \sigma_1 Y_{-x}^*(-x) = -i\alpha \sigma_1 \zeta^* \sigma_3 Y^*(-x) - \alpha \sigma_1 (\sigma_1^{-1} Q_0 \sigma_1) Y^*(-x) \\ &\implies \alpha \sigma_1 Y_{-x}^*(-x) = \alpha [i(-\zeta^*) \sigma_3 Y^*(-x) + Q_0] \sigma_1 Y^*(-x) \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

则 $\hat{Y}_x = i\hat{\zeta} \sigma_3 \hat{Y} + Q \hat{Y}$, 其中

$$\hat{\zeta} = -\zeta^*, \quad \hat{Y} = \alpha \sigma_1 Y^*(-x), \quad \forall \alpha \in \mathbb{C} \quad (3.3.7)$$

由此可得, 若 $\zeta_k \in \mathbb{C}_+$ 是特征值问题(3.3.1)的特征值, 则 $\hat{\zeta}_k = -\zeta_k^* \in \mathbb{C}_+$ 也是其特征值. 另外将 $(\hat{Y}_k, \hat{\zeta}_k)$ 带入(3.3.3)可得 $x \rightarrow -\infty$ 时

$$\hat{Y}_k(x) \rightarrow \begin{pmatrix} \hat{a}_k e^{-i\hat{\zeta}_k x} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha \sigma_1 Y_k(-x) \rightarrow \begin{pmatrix} -\alpha b_k^* e^{i\zeta_k^* x} \\ 0 \end{pmatrix}, \implies \hat{a}_k = -\alpha b_k^* \quad (3.3.8)$$

类似的可得 $-\hat{b}_k = \alpha a_k^*$, 故有

$$\hat{v}_{k0} = -\alpha \sigma_1 v_{k0}^* = \begin{pmatrix} -\alpha b_k^* \\ -\alpha a_k^* \end{pmatrix} \quad (3.3.9)$$

若 $\text{Re}(\zeta_k) \neq 0 \implies \hat{\zeta}_k = -\zeta_k^* \neq \zeta_k$. 将 $\hat{v}_{k0}$ 带入(3.2.4), 则 $-\alpha$ 会被消去, 不失一般性, 可令 $-\alpha = 1$, 则 $\hat{v}_{k0} = \sigma_1 v_{k0}^*$, 故第一部分得证.

若 $\text{Re}(\zeta_k) = 0 \implies \hat{\zeta}_k = -\zeta_k^* = \zeta_k$. 则 $\hat{v}_{k0} = v_{k0}$, 不失一般性, 可将特征向量 v_{k0} 进行缩放, 令 $a_k = 1$, 将其带入(3.3.9), 则有 $|\alpha| = 1, v_{k0} = (1, -\alpha)^T$, 记 $-\alpha = e^{i\theta_k}, \theta_k \in \mathbb{R}$, 则有 $v_{k0} = (1, e^{i\theta_k})^T$, 故第二部分得证.

类似地, 对于 $\bar{\zeta}_k \in \mathbb{C}_-$ 的情形同理可得. $\square$

注 注意到对于逆空间方程, 我们有 $Q_0^\dagger(-x) = -Q_0(-x) = \sigma_1 Q_0 \sigma_1^{-1}$, 我们可得到 $\bar{\zeta} = -\zeta^*$ 和 $\bar{Y} = \sigma_1 Y^\dagger(-x)$. 然而, 这种方法得到的是相对半平面之间散射数据的关系, 不如在相同半平面的对称关系更有价值.

3.3.2 逆时间 NLS 方程

定理 3.2

对于逆时间 NLS 方程(3.1.8), 若 $\zeta_k \in \mathbb{C}_+$ 是原谱问题(3.3.1)的特征值, 则 $\bar{\zeta}_k = -\zeta_k \in \mathbb{C}_-$ 也是伴随谱问题(3.3.2)的特征值. 因此特征值总是成对出现, 且分别位于复平面的相对半平面上, 即 $(\zeta_k, -\zeta_k)$. 它们对应的特征向量满足 $\bar{v}_{k0} = v_{k0}^T$.

证明 逆空间 NLS 方程 (3.1.8) 是从耦合薛定谔方程 (3.1.1) 在约化条件 (3.1.4) 下导出的, 位势矩阵 Q_0 为

$$Q_0 = \begin{pmatrix} 0 & q(x, 0) \\ -q(x, 0) & 0 \end{pmatrix} \quad (3.3.10)$$

注意到 $Q_0^T(x) = -Q_0(x)$, 对 (3.3.1) 两边同时取转置, 得

$$Y_x = i\zeta\sigma_3 Y + Q_0 Y \implies Y_x^T = i\zeta Y^T \sigma_3 + Y^T Q_0^T \implies Y_x^T = i\zeta Y^T \sigma_3 - Y^T Q_0 \quad (3.3.11)$$

则有 $\bar{Y}_x = i\bar{\zeta}\bar{Y} - Y^T Q_0$, 其中

$$\bar{\zeta} = -\zeta, \quad \bar{Y}(x) = Y^T(x) \quad (3.3.12)$$

这意味着 $(\bar{\zeta}, \bar{Y}(x))$ 满足伴随特征值问题(3.3.2).

因此若 $\zeta_k \in \mathbb{C}_+$ 是原谱问题 (3.3.1) 的特征值, 则 $\bar{\zeta}_k = -\zeta_k \in \mathbb{C}_-$ 也是伴随谱问题 (3.3.2) 的特征值. 利用特征值的关系和特征函数的渐近行为 (3.3.3)-(3.3.4), 我们很容易得到 $\bar{a}_k = a_k, \bar{b}_k = b_k$ 和 $\bar{v}_{k0} = v_{k0}^T$. $\square$

3.3.3 逆时空 NLS 方程

定理 3.3

对于逆时空 NLS 方程 (3.1.9), 特征值 ζ 可以位于 $\mathbb{C}_+$ 的任意位置, 而特征值 $\bar{\zeta}_k$ 可以位于 $\mathbb{C}_-$ 的任意位置. 然而, 它们的特征向量必须具有以下形式

$$v_{k0} = (1, \omega_k)^T, \quad \bar{v}_{k0} = (1, \bar{\omega}_k) \quad (3.3.13)$$

其中 $\omega_k = \pm 1, \bar{\omega}_k = \pm 1$

证明 逆时空 NLS 方程 (3.1.9) 是从耦合 NLS 方程 (3.1.1) 在约化条件(3.1.5) 下导出的, 位势矩阵 Q_0 为

$$Q_0 = \begin{pmatrix} 0 & q(x, 0) \\ -q(-x, 0) & 0 \end{pmatrix} \quad (3.3.14)$$

注意到 $Q_0(-x) = -\sigma_1^{-1} Q_0(x) \sigma_1$, 则对 (3.3.1) 两边同时取 $x \rightarrow -x$, 得

$$\begin{aligned} Y_x &= i\zeta\sigma_3 Y + Q_0 Y \implies -Y_x(-x) = i\zeta\sigma_3 Y(-x) + Q_0(-x)Y(-x) \\ &\implies -\sigma_1 Y_x(-x) = i\zeta\sigma_1\sigma_3 Y(-x) - \sigma_1 Q_0(-x)Y(-x) \\ &\implies \sigma_1 Y_x(-x) = [i\zeta\sigma_3 + Q_0(-x)] \sigma_1 Y(-x) \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

则有 $\hat{Y}_x(x) = i\hat{\zeta}\sigma_3 \hat{Y}(x) + Q_0(x)\hat{Y}(x)$, 其中

$$\hat{\zeta} = \zeta, \quad \hat{Y}(x) = \sigma_1 Y(-x) \quad (3.3.16)$$

这意味着对于任意特征值 $\zeta_k \in \mathbb{C}_+$, 若 $Y_k(x)$ 是其特征函数, 则 $\hat{Y}_k(x) = \sigma_1 Y_k(-x)$ 也是其特征函数. 因此 $\hat{Y}_k$ 和 Y_k 是线性相关的, 即

$$Y_k(x) = \omega_k \sigma_1 Y_k(x) \quad (3.3.17)$$

其中 ω_k 是某个常数. 利用这个关系和特征函数 $Y_k(x)$ 的渐近行为 (3.3.3), 我们很容易得到 $a_k = \omega_k b_k, b_k = \omega_k a_k$, 故 $\omega_k = \pm 1$. 不失一般性, 我们记 $a_k = 1$, 则 $v_{k0} = (1, \omega_k)^T$. $\square$

对于 2×2 Lax 对导出的逆空间和逆时空 NLS 方程, 散射数据的对称关系可以通过初等变换得到, 这是二阶矩

阵的优势. 然而, 对于更高阶的 Lax 对, 如 3×3 Lax 对导出的四分量非局部 NLS 方程, 就只能通过转置或 Hermitian 转置, 我们将在下一章讨论.

注 实际上我们也可以直接解 (3.2.4) 施加约化条件 (3.1.3)-(3.1.5), 提取散射数据 $\{\zeta_k, \bar{\zeta}_k, v_{k0}, \bar{v}_{k0}, 1 \leq k \leq N\}$ 的对称关系. 然而, 上面对这些关系的推导更为简单. 此外, 这种推导在逆散射和 Riemann-Hilbert 框架下更具启发性.

3.3.4 特征函数对称性与 RH 方法等价性

至此, 我们还有一个问题,

问题 3.1 为何特征值问题所给出的离散特征值及特征向量的对称关系可以直接用于 RH 方法构造的 N 孤子解? 具体而言, RH 核条件 $P^+(\zeta_k)v_k = 0$ 与特征值问题 $Y_x = MY$ 所确定的离散谱数据为何一致?

这一问题可参考 Ablowitz 1974 年论文 [1] 第二小节, 这里结合本文的符号体系给出简要证明.

证明 不失一般性, 考虑驻定情形, $\phi_{\pm} = J_{\pm} e^{-i\zeta x \sigma_3}$, 则上半平面的 RH 矩阵为

$$P^+(\zeta) = (\phi_{-,1}, \phi_{+,2}) e^{i\zeta x \sigma_3}. \quad (3.3.18)$$

设 $\zeta_k \in \mathbb{C}_+$ 是 $\det P^+$ 的简单零点, 且

$$P^+(\zeta_k)v_k = 0, \quad v_k = e^{-i\zeta_k x \sigma_3}(x, \zeta_k)v_{k0}, \quad v_{k0} = (a_k, b_k)^T. \quad (3.3.19)$$

则

$$P^+(\zeta_k)v_k = (\phi_{-,1}, \phi_{+,2})v_{k0} = a_k\phi_{-,1} + b_k\phi_{+,2} = 0. \quad (3.3.20)$$

其中

$$\phi_{-,1} \sim \begin{pmatrix} e^{-i\zeta_k x} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x \rightarrow -\infty, \quad \phi_{+,2} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\zeta_k x} \end{pmatrix}, \quad x \rightarrow +\infty. \quad (3.3.21)$$

另一方面, 设 Y_k 是特征值 ζ_k 对应的离散特征函数, 其渐近系数向量为 $v'_{k0} = (a'_k, b'_k)^T$. 由离散谱条件有

$$Y_k \rightarrow \begin{pmatrix} a'_k e^{-i\zeta_k x} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x \rightarrow -\infty, \quad Y_k \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -b'_k e^{i\zeta_k x} \end{pmatrix}, \quad x \rightarrow +\infty. \quad (3.3.22)$$

由 Jost 解的唯一性,

$$Y_k = a'_k \phi_{-,1} = -b'_k \phi_{+,2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3.3.23)$$

从而

$$a'_k \phi_{-,1} + b'_k \phi_{+,2} = 0. \quad (3.3.24)$$

比较 (3.3.20) 与 (3.3.24), 由于 ζ_k 是简单零点, $\ker P^+(\zeta_k)$ 为一维空间, 故存在 $c_k \neq 0$ 使

$$v_{k0} = c_k v'_{k0}. \quad (3.3.25)$$

选取相同的标量规范可令 $c_k = 1$, 因而 $v_{k0} = v'_{k0}$. 下半平面的伴随特征值问题可作相同推导, 得到 $\bar{v}_{k0} = \bar{v}'_{k0}$. $\square$

现在我们可以对问题 3.1 做肯定的回答. 且不但可以对原问题求对称性, 也可联立原问题和伴随问题求解对称性.

或许读者意识到, 因为 2×2 情形存在 Paoli 矩阵可随意切换行列, 使得原问题和伴随问题的特征值问题可以相互转化. 然而, 对于更高阶的 Lax 对, 例如 3×3 Lax 对, 其散射数据的对称关系无法通过初等变换得到, 只能通过转置或 Hermitian 转置得到, 是否仍有类似的结果?

为此我们在下一章节将视角转向 3×3 AKSN 系统导出的逆空间 NLS 方程, 分别采用两种方法求解, 仍可得到与本章三个定理类似的结果.

3.4 动力学分析

在本节中, 我们将利用前一节中得到的散射数据的对称关系, 分析逆空间, 逆时间和逆时空 NLS 方程的孤子动力学行为. 我们仅考虑 $N = 1$ 和 $N = 2$ 的情形, 重点在于双孤子是否为单孤子的简单 (非线性) 叠加, 或是表现

出更复杂的相互作用行为. 为此我们需要先考虑局部 NLS 方程孤子解的动力系统. 当 $N = 1$ 时, 局部 NLS 方程的孤子解为

$$q(x, t) = -\frac{4ia_1b_1^*\text{Im}(\zeta_1)}{|a_1|^2e^{2i\zeta_1^*x+4i(\zeta_1^*)^2t} + |b_1|^2e^{2i\zeta_1x+4i\zeta_1^2t}} \quad (3.4.1)$$

且二 (N) 孤子为单孤子的非线性叠加. 下面我们分析逆空间, 逆时间和逆时空 NLS 方程的孤子动力学行为.

3.4.1 逆空间 NLS 方程的动力学分析

对于逆空间取 $N = 1$ 时, 则有 $\zeta_1 \in i\mathbb{R}$, 这是因为 $\zeta_1 = -\zeta_1^* \implies \text{Re}(\zeta_1) = 0$. 令 $\zeta_1 = i\eta_1 \in \mathbb{R}_+$, $\bar{\zeta}_1 = i\bar{\eta}_1 \in \mathbb{R}_-$, 对应的特征值为 $v_{10} = (1, e^{i\theta_1})^T$, $\bar{v}_{10} = (1, e^{i\bar{\theta}_1})$, 则孤子解为

$$q(x, t) = 2(\eta_1 - \bar{\eta}_1) \frac{1}{e^{\Delta_1} + e^{\bar{\Delta}_1}} \quad (3.4.2)$$

其中

$$\Delta_1 = -(2i\eta_1x + 4i\eta_1^2t - i\theta_1), \quad \bar{\Delta}_1 = -(2\bar{\eta}_1x + 4i\bar{\eta}_1^2t + i\bar{\theta}_1) \quad (3.4.3)$$

很容易发现 Δ_1 和 $\bar{\Delta}_1$ 中的 θ_1 和 $\bar{\theta}_1$ 符号不同, 这导致二 (N) 孤子解与单孤子解的动力系统完全不同, 不为单孤子的非线性叠加. 故其与局部 NLS 方程的孤子解的动力系统完全不同.

3.4.2 逆时间 NLS 方程的动力学分析

对于逆时间情形, 取 $N = 1$, 则有

$$q(x, t) = -4i\zeta_1b_1 \frac{e^{-4i\zeta_1^2t}}{e^{-2i\zeta_1x} + b_1^2e^{2i\zeta_1x}} \quad (3.4.4)$$

可以发现, 不论 ζ_1 取何值, 孤子解始终是静止的, 且不会坍塌. 而 $N = 2$ 时, 若 $\text{Im}(\zeta_1) \neq \text{Im}(\zeta_2)$, 则解会反复坍塌, 所以双孤子解并非单孤子的简单叠加. 这种坍塌现象在局部 NLS 方程中是不存在的, 这说明逆时间 NLS 方程的动力学行为与局部 NLS 方程有本质的不同.

3.4.3 逆时空 NLS 方程的动力学分析

对于逆时空情形, 取 $N = 1$ 时,

$$q(x, t) = 2i(\bar{\zeta}_1 - \zeta_1) \frac{\bar{\omega}_1 e^{-2i\bar{\zeta}_1x - 4i\bar{\zeta}_1^2t}}{1 + \omega_1\bar{\omega}_1 e^{-2i(\bar{\zeta}_1 - \zeta_1)x - 4i(\bar{\zeta}_1^2 - \zeta_1^2)t}} \quad (3.4.5)$$

很容易发现逆时空情形的多孤子解为简单孤子的非线性叠加, 这是因为特征值 $(\zeta_k, \bar{\zeta}_k)$ 是完全独立的, 且对应的特征向量 $v_{k0} = (1, \omega_k)^T$, $\bar{v}_{k0} = (1, \bar{\omega}_k)$ 仅有四种可能的组合, 且几乎不会发生复杂耦合, 这限制了孤子间的相互作用.

另外, 这是唯一可以移动的孤子解, 其速度为 $V = -2\text{Im}(\bar{\zeta}_1^2 - \zeta_1^2)/\text{Im}(\bar{\zeta}_1 - \zeta_1)$. 在直线 $x = Vt$ 上模取得最大值,

$$|q(x, t)| = 2|\bar{\zeta}_1 - \zeta_1| \frac{e^{\beta t}}{1 + \omega_1\bar{\omega}_1 e^{i\gamma t}} \quad (3.4.6)$$

其中

$$\beta = 2V\text{Im}(\bar{\zeta}_1) + 4\text{Im}(\bar{\zeta}_1^2) = -8 \frac{\text{Im}(\zeta_1)\text{Im}(\bar{\zeta}_1)\text{Re}(\bar{\zeta}_1 - \zeta_1)}{\text{Im}(\bar{\zeta}_1 - \zeta_1)}, \quad (3.4.7)$$

$$\gamma = -2V\text{Re}(\bar{\zeta}_1 - \zeta_1) - 4\text{Re}(\bar{\zeta}_1^2 - \zeta_1^2) = -4|\zeta_1 - \bar{\zeta}_1|^2 \frac{\text{Im}(\zeta_1 + \bar{\zeta}_1)}{\text{Im}(\zeta_1 - \bar{\zeta}_1)} \quad (3.4.8)$$

如果 $\text{Im}(\zeta_1 + \bar{\zeta}_1) \neq 0$, 则 $\gamma \neq 0$, 孤子解会反复坍塌, 坍塌周期为 $T = 2\pi/|\gamma|$. 若 $\text{Re}(\zeta_1 - \bar{\zeta}_1) \neq 0 \implies \beta \neq 0$, 则孤子解会增加或减小, 具体取决于 β 的正负号. 只有当 $\text{Im}(\zeta_1 + \bar{\zeta}_1) = 0$ 时, 孤子解才不会坍塌, 且当 $\text{Re}(\zeta_1 - \bar{\zeta}_1) = 0$ 时, 孤子解的幅值保持不变.

第4章 三阶 AKNS 方程组的逆时空约化

现在我们将眼光转向 3×3 逆时空非局域 AKNS 系统, 读者在学完本章节后会更加体会到如何利用 RH 方法处理反散射数据的对称性求解逆时空问题.

本章接分为四个部分, 首先介绍三阶 AKNS 方程组的约化, 这一部分基本照抄了君言师姐的论文; 第二部分为利用 RH 方法求解耦合 NLS 方程的 N 孤子解, 这部分参考了王灯山的论文 [2]; 第三部分则证明了特征值问题对称性与 RH 问题对称性的等价性, 这一部分用以回答上一章节问题 3.1: 为何特征值和特征向量的对称性可替换 N 孤子解相关参数? 这部分为笔者的原创内容; 第四部分则介绍利用 RH 方法求解三阶逆时空 NLS 方程组的 N 孤子解, 构成了笔者的第一篇文章.

4.1 AKNS 方程组的约化

首先考虑 3×3 AKNS 系统, 它的 Lax 对为

$$\Phi_x = U\Phi = (-i\zeta\Lambda + Q)\Phi, \quad (4.1.1)$$

$$\Phi_t = V\Phi = (2i\zeta^2\Lambda + R)\Phi, \quad (4.1.2)$$

其中 $R = -2\zeta Q + i(Q^2 + Q_x)\Lambda$, 且

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & q \\ -r_1 & -r_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.1.3)$$

其中 $r_1 = ap_1 + bq_1, r_2 = cp_1 + dq_1$, 这里 p_1 可能为 $p, p(-x), p(-t), p(-x, -t)$ 及其共轭, q_1 同理, 且 $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ 为任意复数. 此时零曲率方程 $U_t - V_x + [U, V] = 0$ 等价于 $iQ_t\Lambda + Q_{xx} - 2Q^3 = 0$, 则得到四分量方程

$$(13): \quad ip_t + p_{xx} + 2p(pr_1 + qr_2) = 0, \quad (4.1.4)$$

$$(23): \quad iq_t + q_{xx} + 2q(pr_1 + qr_2) = 0, \quad (4.1.5)$$

$$(31): \quad -ir_{1t} + r_{1xx} + 2r_1(pr_1 + qr_2) = 0, \quad (4.1.6)$$

$$(32): \quad -ir_{2t} + r_{2xx} + 2r_2(pr_1 + qr_2) = 0. \quad (4.1.7)$$

其中若未声明变量默认为 (x, t) , 下同. 考虑相容性条件. 我们有 p_1 只可能为 $p^*(x, t), p^*(-x, t), p(x, -t), p(-x, -t)$, q_1 同理. 则得到如下四种约化

$$r_1 = ap^*(x, t) + bq^*(x, t), \quad r_2 = b^*p^*(x, t) + dq^*(x, t), \quad a, d \in \mathbb{R}, \quad (4.1.8)$$

$$r_1 = ap^*(-x, t) + bq^*(-x, t), \quad r_2 = b^*p^*(-x, t) + dq^*(-x, t), \quad a, d \in \mathbb{R}, \quad (4.1.9)$$

$$r_1 = ap(x, -t) + bq(x, -t), \quad r_2 = bp(x, -t) + dq(x, -t), \quad (4.1.10)$$

$$r_1 = ap(-x, -t) + bq(-x, -t), \quad r_2 = bp(-x, -t) + dq(-x, -t), \quad (4.1.11)$$

注 这里的相容性条件指通过 (4.1.4)-(4.1.7) 划分为两份量方程, 考虑利用 (13), (23) 式化为 (31) 式, 要将 ip_t 变为 $-ir_{1t}$, 则要么 $t \rightarrow -t$, 要么做共轭. 由于对 t 求导, 故与 x 无关, 只能选择上述四种情形.

若进一步考虑将其约化为单分量方程, 则有如下三种可能

$$q(x, t) = p(-x, t), \quad a = d, \quad (4.1.12)$$

$$q(x, t) = p^*(x, -t), \quad a = d^*, \quad (4.1.13)$$

$$q(x, t) = p^*(-x, -t), \quad a = d^*, \quad (4.1.14)$$

接下来我们讨论可能的约化情况, 为表示方便, 记 $\Delta = pr_1 + qr_2$.

情形 1. $p_1 = p^*, q_1 = q^*$

此时我们有 $r_1 = ap^* + bq^*, r_2 = cp^* + dq^*$, 带入 (4.1.4)-(4.1.7), 得到

$$(13): ip_t + p_{xx} + 2p\Delta = 0 \quad (4.1.15)$$

$$(23): iq_t + q_{xx} + 2q\Delta = 0 \quad (4.1.16)$$

$$(31): a(-ip_t^* + p_{xx}^* + 2p^*\Delta) + b(-iq_t^* + q_{xx}^* + 2q^*\Delta) = 0 \quad (4.1.17)$$

$$(32): c(-ip_t^* + p_{xx}^* + 2p^*\Delta) + d(-iq_t^* + q_{xx}^* + 2q^*\Delta) = 0 \quad (4.1.18)$$

要利用 (13), (23) 式消去 (31), (32) 式, 则需要 $\Delta = \Delta^*$,

$$\Delta = app^* + bpq^* + cp^*q + dqq^* \quad (4.1.19)$$

$$\Delta^* = a^*p^*p + b^*p^*q + c^*pq^* + d^*q^*q \quad (4.1.20)$$

可得 $a, d \in \mathbb{R}, c = b^*$. 此时我们有

$$(31) = a(13)^* + b(23)^* \quad (32) = b^*(13)^* + d(23)^* \quad (4.1.21)$$

方程约化为

$$ip_t + p_{xx} + 2p(app^* + bpq^* + b^*p^*q + dqq^*) = 0 \quad (4.1.22)$$

$$iq_t + q_{xx} + 2q(app^* + bpq^* + b^*p^*q + dqq^*) = 0 \quad (4.1.23)$$

这个方程即为文献 [2] 提出的具有四波混频效应的耦合广义 NLS 方程. 下面我们进一步约化, 尝试把两个方程约化为一个方程. 这里 q 可取 $p(-x), p^*(-t), p^*(-x, -t)$.

Case 1.1 $q = p(-x)$

带入 (4.1.22)-(4.1.23), 得到 $a = d, b \in \mathbb{R}$, 此时 $r_1 = ap^* + bp^*(-x), r_2 = b^*p^* + ap^*(-x)$, 方程约化为

$$ip_t + p_{xx} + 2p[app^* + bpp^*(-x) + b^*p^*p(-x) + ap(-x)p^*(-x)] = 0 \quad (4.1.24)$$

即单分量逆空间非局域 NLS 方程.

Case 1.2 $q = p^*(-t)$

此时 $a = d$, 则 $r_1 = ap^* + bp(x, -t), r_2 = b^*p^* + ap(x, -t)$ 方程约化为

$$ip_t + p_{xx} + 2p[app^* + bpp(-t) + b^*p^*p^*(-t) + ap(-t)p^*(-t)] = 0 \quad (4.1.25)$$

即单分量逆时间非局域 NLS 方程.

Case 1.3 $q = p^*(-x, -t)$

此时 $a = d$, 则 $r_1 = ap^* + bp(-x, -t), r_2 = b^*p^* + ap(-x, -t)$ 方程约化为

$$ip_t + p_{xx} + 2p[app^* + bpp(-x, -t) + b^*p^*p^*(-x, -t) + ap(-x, -t)p^*(-x, -t)] = 0 \quad (4.1.26)$$

情形 2. $p_1 = p^*(-x), q_1 = q^*(-x)$

此时 $r_1 = ap^*(-x) + bq^*(-x), r_2 = cp^*(-x) + dq^*(-x)$, 要消去 (4.1.4)-(4.1.7) 中 (31), (32) 式, 只需 $\Delta = \Delta^*(-x)$, 其中

$$\Delta = ap^*(-x)p + bq^*(-x)p + cp^*(-x)q + dq^*(-x)q \quad (4.1.27)$$

$$\Delta^*(-x) = a^*pp^*(-x) + b^*qp^*(-x) + c^*pq^*(-x) + d^*qq^*(-x) \quad (4.1.28)$$

则 $a, d \in \mathbb{R}, b = c^* \in \mathbb{C}$, 此时

$$(31) = a(13)^*(-x) + b(23)^*(-x), \quad (32) = b^*(13)^*(-x) + d(23)^*(-x), \quad (4.1.29)$$

方程 (4.1.4)-(4.1.7) 约化为

$$ip_t + p_{xx} + 2p [app^*(-x) + bpq^*(-x) + b^*p^*(-x)q + dq^*(-x)q] = 0, \quad (4.1.30)$$

$$iq_t + q_{xx} + 2q [app^*(-x) + bpq^*(-x) + b^*p^*(-x)q + dq^*(-x)q] = 0 \quad (4.1.31)$$

则 q 可取 $p^*(-t), p(-x), p^*(-x, -t)$.

Case 2.1 $q = p(-x)$

此时 $a = d$, 方程约化为

$$ip_t + p_{xx} + 2p [app^*(-x) + bpp^* + bp^*(-x)p(-x) + ap^*p(-x)] = 0 \quad (4.1.32)$$

Case 2.2 $q = p^*(-t)$

此时 $a = d$. 方程约化为

$$ip_t + p_{xx} + 2p [app^*(-x) + bpp(-x, -t) + b^*p^*(-x)p^*(-t) + ap(-x, -t)p^*(-t)] = 0 \quad (4.1.33)$$

Case 2.3 $q = p^*(-x, -t)$

此时 $r_1 = ap^*(-x) + bp(-t), r_2 = b^*p^*(-x) + ap(-t)$, 方程约化为

$$ip_t + p_{xx} + 2p [app^*(-x) + bpp(-t) + b^*p^*(-x)p^*(-x, -t) + ap(-t)p^*(-x, -t)] = 0 \quad (4.1.34)$$

情形 3. $p_1 = p(-t), q_1 = q(-t)$

此时 $r_1 = ap(-t) + bq(-t), r_2 = cp(-t) + dq(-t)$ 要约化 (31) (32), 需要 $\Delta(-t) = \Delta$, 其中

$$\Delta = app(-t) + bpq(-t) + cp(-t)q + dq(-t)q \quad (4.1.35)$$

$$\Delta(-t) = ap(-t)p + bp(-t)q + cpq(-t) + dq(-t)q$$

则 $b = c$, 此时有

$$(31) = a(13)(-t) + b(23)(-t), \quad (32) = b(13)(-t) + d(23)(-t), \quad (4.1.36)$$

方程约化为

$$ip_t + p_{xx} + 2p [app(-t) + bpq(-t) + bp(-t)q + dq(-t)q] = 0, \quad (4.1.37)$$

$$iq_t + q_{xx} + 2q [app(-t) + bpq(-t) + bp(-t)q + dq(-t)q] = 0, \quad (4.1.38)$$

q 取值同上.

Case 3.1 $q = p(-x)$

此时 $a = d$, 方程约化为

$$ip_t + p_{xx} + 2p [app(-t) + bpp(-x, -t) + bp(-t)p(-x) + ap(-x)p(-x, -t)] = 0 \quad (4.1.39)$$

Case 3.2 $q = p^*(-t)$

此时 $a^* = d, b \in \mathbb{R}$, 方程约化为

$$ip_t + p_{xx} + 2p [app(-t) + bpp^* + bp(-t)p^*(-t) + a^*p^*p^*(-t)] = 0 \quad (4.1.40)$$

Case 3.3 $q = p^*(-x, -t)$

此时 $a^* = d, b \in \mathbb{R}$, 方程约化为

$$ip_t + p_{xx} + 2p[app(-t) + bpp^*(-x) + bp(-t)p^*(-x, -t) + a^*p^*(-x)p^*(-x, -t)] = 0 \quad (4.1.41)$$

情形 4. $p_1 = p(-x, -t), q_1 = q(-x, -t)$

此时有 $r_1 = ap(-x, -t) + bq(-x, -t), r_2 = cp(-x, -t) + dq(-x, -t)$, 要约化 (31) (32), 需要 $\Delta(-x, -t) = \Delta$, 其中

$$\Delta = app(-x, -t) + bpq(-x, -t) + cp(-x, -t)q + dq(-x, -t)q \quad (4.1.42)$$

$$\Delta(-x, -t) = ap(-x, -t)p + bp(-x, -t)q + cpq(-x, -t) + dq(-x, -t)q \quad (4.1.43)$$

则 $\Delta(-x, -t) = \Delta$, 只需 $b = c$, 此时有

$$(31) = a(13)(-x, -t) + b(23)(-x, -t) \quad (4.1.44)$$

$$(32) = b(13)(-x, -t) + d(23)(-x, -t) \quad (4.1.45)$$

方程约化为

$$ip_t + p_{xx} + 2p[app(-x, -t) + bpq(-x, -t) + bp(-x, -t)q + dq(-x, -t)q] = 0, \quad (4.1.46)$$

$$iq_t + q_{xx} + 2q[app(-x, -t) + bpq(-x, -t) + bp(-x, -t)q + dq(-x, -t)q] = 0, \quad (4.1.47)$$

Case 4.1 继续增加约化条件 $q = p(-x, t)$

此时 $a = d$, 则 $r_1 = ap(-x, -t) + bp(-t), r_2 = bp(-x, -t) + dp(-t)$, 此时有 $(23) = (13)(-x)$. 方程约化为

$$ip_t + p_{xx} + 2p[app(-x, -t) + bpp(-t) + bp(-x, -t)p(-x) + ap(-t)p(-x)] = 0 \quad (4.1.48)$$

Case 4.2 继续增加约化条件 $q = p^*(-t)$

此时 $a^* = d, b \in \mathbb{R}$, 则 $r_1 = ap(-x, -t) + bp^*(-t), r_2 = bp(-x, -t) + dp^*(-t)$, 方程约化为

$$ip_t + p_{xx} + 2p[app(-x, -t) + bpp^*(-t) + bp(-x, -t)p^*(-t) + a^*p^*(-t)p^*(-x)] = 0 \quad (4.1.49)$$

Case 4.3 继续增加约化条件 $q = p^*(-x, -t)$

此时 $a = d^*, b \in \mathbb{R}$, 则 $r_1 = ap(-x, -t) + bp^*, r_2 = bp(-x, -t) + dp^*$, 方程约化为

$$ip_t + p_{xx} + 2p[app(-x, -t) + bpp^* + bp(-x, -t)p^*(-x, -t) + a^*p^*p^*(-x, -t)] = 0 \quad (4.1.50)$$

至此, 我们推导出所有可能的约化情况.

4.2 利用 RH 方法求解广义耦合 NLS 方程

本部分我们将利用 RH 方法求解零边界的耦合 NLS 方程 (4.1.22), (4.1.23). 故 $x \rightarrow \pm\infty$ 时, $p, q \rightarrow 0$, 则

$$\phi \sim E := e^{\theta\Lambda}, \quad \theta = -i\zeta x + 2i\zeta^2 t \quad (4.2.1)$$

注意到

$$E^*(\zeta^*) = E^\dagger(\zeta^*) = E^{-1}(\zeta), \quad E^*(-x, t - \zeta^*) = E^\dagger(-x, t - \zeta^*) = E^{-1}(x, t\zeta) \quad (4.2.2)$$

Jost 渐近解为 $J = \phi E^{-1}$, 则有 $J \rightarrow I, x \rightarrow \pm\infty$. 将其带入 Lax 对 (4.1.1) 有

$$J_x E + J E(-i\zeta\Lambda) = (-i\zeta\Lambda + Q) J E \implies J_x = -i\zeta[\Lambda, J] + QJ \quad (4.2.3)$$

同理有

$$J_t = 2i\zeta^2[\Lambda, J] + RJ \quad (4.2.4)$$

则由上式易见

$$\mathrm{tr}(J^{-1}J_x) = -i\zeta(\mathrm{tr}(J^{-1}\Lambda J) - \mathrm{tr}(\Lambda)) + \mathrm{tr}(J^{-1}QJ) = 0, \quad (4.2.5)$$

同理有 $\mathrm{tr}(J^{-1}J_t) = 0$, 由 Abel 定理有 $\det(J)_x = \det(J) \mathrm{tr}(J^{-1}J_x) = 0$, $\det(J)_t = \det(J) \mathrm{tr}(J^{-1}J_t) = 0$, 则 $\det(J) = 1$. 对上式变换有

$$\begin{aligned} \hat{E}^{-1}J_x + i\zeta\hat{E}^{-1}[\Lambda, J] &= \hat{E}^{-1}QJ, \\ \hat{E}^{-1}J_t - 2i\zeta\hat{E}^{-1}[\Lambda, J] &= \hat{E}^{-1}RJ. \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

其中 $\hat{E}^{-1}X = E^{-1}XE$, 则易得全微分形式

$$d(\hat{E}^{-1}J) = \hat{E}^{-1}[(Qdx + Rdt)J]. \quad (4.2.7)$$

4.2.1 解析性

利用全微分形式 (4.2.7), 可得 Volterra 积分形式为

$$\begin{aligned} J_-(x, t, \zeta) &= I + \int_{-\infty}^x e^{i\zeta(y-x)\Lambda} Q(y, t) J_-(y, t, \zeta) e^{-i\zeta(y-x)\Lambda} dy, \\ J_+(x, t, \zeta) &= I - \int_x^{+\infty} e^{i\zeta(y-x)\Lambda} Q(y, t) J_+(y, t, \zeta) e^{-i\zeta(y-x)\Lambda} dy. \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

证明 这里仅证明 J_- , J_+ 同理对 (4.2.7) 沿 $-\infty \rightarrow x$ 积分, 可得

$$\begin{aligned} \hat{E}^{-1}J_-(x, t, \zeta)|_{-\infty}^x &= \int_{-\infty}^x \hat{E}^{-1}(y, t) Q(y, t) J_-(y, t, \zeta) dy \\ \implies J_- &= I + \int_{-\infty}^x E(x, t) E^{-1}(y, t) Q(y, t) J_-(y, t, \zeta) E(y, t) E^{-1}(x, t) dy \\ &= I + \int_{-\infty}^x e^{i\zeta(y-x)\Lambda} Q(y, t) J_-(y, t, \zeta) e^{-i\zeta(y-x)\Lambda} dy \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

若设 $J_- = ([J_-]_1, [J_-]_2, [J_-]_3)$, 现考虑 $[J_-]_1$, 由上式得

$$\begin{aligned} [J_-]_1(x, t, \zeta) &= (1, 0, 0)^T + \int_{-\infty}^x e^{i\zeta(y-x)\Lambda} Q(y, t) J_-(y, t, \zeta) e^{i\zeta(y-x)\Lambda} (1, 0, 0)^T dy \\ &= (1, 0, 0)^T + \int_{-\infty}^x D_1(x, y, \zeta) Q(y, t) J_{-,1}(y, t, \zeta) dy \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

其中 $D_1(x, y, \zeta) = \mathrm{diag}(1, 1, e^{2i\zeta(y-x)})$. 定义 Neumann 级数及递推序列

$$[J_-]_1(x, t, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n, \quad c_0 = (1, 0, 0)^T, \quad c_{n+1} = \int_{-\infty}^x D_1(x, y, \zeta) Q(y, t) c_n(y, t, \zeta) dy. \quad (4.2.11)$$

对向量取 ℓ^1 范数 $\|v\|_1 = \sum_{j=1}^3 |v_j|$, 对矩阵取诱导范数 $\|A\| = \max_{1 \leq k \leq 3} \sum_{j=1}^3 |A_{jk}|$. 若 $\zeta \in \mathbb{C}_-$, 有 $\|D(x, y, \zeta)\| \leq 1$, 则

$$\|c_{n+1}\| \leq \int_{-\infty}^x \|Q(y, t)\| \|c_n(y, t, \zeta)\| dy. \quad (4.2.12)$$

记

$$\omega = \int_{-\infty}^x \|Q(y, t)\| dy, \quad (4.2.13)$$

由 $Q \in L^1$, 则任意固定 $x \in \mathbb{R}$, 上述积分存在, 且 $\omega_x = \|\omega\|$.

易见 $\|c_0\| \leq \omega^0/0!$, $\|c_1\| \leq \omega^1/1!$, 由数学归纳法, 不妨设 $\|c_n\| \leq \omega^n/n!$, 则

$$\|c_{n+1}\| \leq \int_{-\infty}^x \omega_x \frac{\omega^n}{n!} dy = \frac{\omega^{n+1}}{(n+1)!}. \quad (4.2.14)$$

故递推序列存在且有界, 又由于

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|c_n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^n}{n!} = e^\omega. \quad (4.2.15)$$

由 Weierstrass 判别法, Neumann 级数 (4.2.11) 在 $\mathbb{C}_-$ 上一致收敛, 故 $J_{-,1}(x, t, \zeta)$ 在 $\mathbb{C}_-$ 中解析且连续到实轴.

唯一性: 设 $J'_{-,1}$ 也为 Volterra 积分的解, 令 $h = J_{-,1} - J'_{-,1}$ 则 h 也为 Volterra 积分方程的解, 即

$$h(x, t, \zeta) = \int_{-\infty}^x D_1(x, y, \zeta) Q(y, t) h(y, t, \zeta) dy, \quad (4.2.16)$$

由 Grönwall 不等式, $h \equiv 0$, 唯一性得证.

同理可得 $J_{-,1}, J_{-,2}, J_{+,3}$ 在 $\mathbb{C}_-$ 中解析且连续到边界., $J_{+,1}, J_{+,2}, J_{-,3}$ 在 $\mathbb{C}_+$ 解析且连续到边界. $\square$

4.2.2 对称性

为表示方便, 我们记 $\phi_\pm = J_\pm E$, 则 $\phi_\pm$ 为 Lax 对 (4.1.1) 的解, 且满足对称关系

$$\phi_- = \phi_+ S(\zeta) \implies J_- E = J_+ E S(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{R}, \quad (4.2.17)$$

则由于 $\det(J_\pm) = 1$, 则 $\det(S(\zeta)) = 1$. 若记

$$P^+ = [[\phi_+]_1, [\phi_+]_2, [\phi_-]_3] E^{-1} = J_+ H_2 + J_- H_1, \quad \zeta \in \mathbb{C}_+ \quad (4.2.18)$$

其中 $H_1 = \text{diag}(0, 0, 1)$, $H_2 = \text{diag}(1, 1, 0)$, 则 P^+ 在 $\mathbb{C}_+$ 解析, 联系 (4.2.18) 及 Volterra 积分 (4.2.9), 可得

$$P^+(x, \zeta) \rightarrow I, \quad (\zeta \in \mathbb{C}_+), \quad (4.2.19)$$

我们现在考虑 (4.2.3) 的伴随问题

$$K_x = -i\zeta[\Lambda, K] - KQ, \quad (4.2.20)$$

并设 $J_\pm^{-1}$ 为伴随问题的 Jost 矩阵, 若记

$$\phi_\pm^{-1} = ([\hat{\phi}_\pm]_1, [\hat{\phi}_\pm]_2, [\hat{\phi}_\pm]_3)^T, \quad (4.2.21)$$

重复上述步骤有

$$[\hat{\phi}_+]_1, [\hat{\phi}_+]_2, [\hat{\phi}_-]_3 \in \mathbb{C}_-, \quad [\hat{\phi}_-]_1, [\hat{\phi}_-]_2, [\hat{\phi}_+]_3 \in \mathbb{C}_+ \quad (4.2.22)$$

可得

$$P^- = E([\hat{\phi}_+]_1, [\hat{\phi}_+]_2, [\hat{\phi}_-]_3)^T = H_2 J_+^{-1} + H_1 J_-^{-1}, \quad \zeta \in \mathbb{C}_- \quad (4.2.23)$$

同理有 $P^-(x, \zeta) \rightarrow I (\zeta \in \mathbb{C}_-)$. 接下来我们考虑对称性, 为表示方便记

$$M_0 = \text{diag}(A_1, 1), \quad M_1 = \text{diag}(A_1, -1), \quad M_2 = \text{diag}(A_2, 1), \quad M_3 = \text{diag}(A_2, -1) \quad (4.2.24)$$

其中

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & b^* \\ b & d \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}. \quad (4.2.25)$$

容易发现 $Q^\dagger = -M_0 Q M_0^{-1}$, 则

命题 4.1

耦合 NLS 满足如下对称关系

$$J_\pm^\dagger(\zeta^*) M_0 = M_0 J_\pm^{-1}(\zeta), \quad S^\dagger(\zeta^*) M_0 = M_0 S^{-1}. \quad (4.2.26)$$

证明 对 (4.2.3) 做映射 $\zeta \rightarrow \zeta^*$ 有

$$J_x(\zeta^*) = -i\zeta^*[\Lambda, J(\zeta^*)] + QJ(\zeta^*), \quad (4.2.27)$$

两边做 Hermitian 转置, 有

$$\begin{aligned} J_x^\dagger(\zeta^*) &= -i\zeta[\Lambda, J^\dagger(\zeta^*)] + J^\dagger(\zeta^*)Q^\dagger = -i\zeta[\Lambda, J^\dagger(\zeta^*)] - J^\dagger(\zeta^*)M_0QM_0^{-1} \\ &\implies J_x^\dagger(\zeta^*)M_0 = -i\zeta[\Lambda, J^\dagger(\zeta^*)M_0] - J^\dagger(\zeta^*)M_0Q, \end{aligned} \quad (4.2.28)$$

由 Volterra 积分的唯一性, 与伴随问题 (4.2.20) 对比可得 $J^\dagger(\zeta^*)M_0 = CJ^{-1}(\zeta)$, 其中 C 为常数矩阵, 由边界条件可得 $x \rightarrow \pm\infty$ 时

$$J_\pm^\dagger(\zeta^*)M_0 \rightarrow M_0, \quad J_\pm^{-1}(\zeta) \rightarrow C \implies C = M_0. \quad (4.2.29)$$

利用 $J_-E = J_+ES(\zeta)$ 及 $E(\zeta^*)^\dagger = E^{-1}$ 可得

$$S^\dagger(\zeta^*) = \left(E^{-1}(\zeta^*)J_+^{-1}(\zeta^*)J_-^{-1}(\zeta^*)E(\zeta^*)\right)^\dagger = E^{-1}M_0J_-^{-1}J_+M_0^{-1}E = M_0S^{-1}(\zeta)M_0^{-1}. \quad (4.2.30)$$

□

进一步可得

$$(P^+(\zeta^*))^\dagger M_0 = M_0P^-(\zeta), \quad (4.2.31)$$

证明

$$\begin{aligned} (P^+(\zeta^*))^\dagger M_0 &= (J_+(\zeta^*)H_2 + J_-(\zeta^*)H_1)^\dagger M_0 = H_2J_+^\dagger(\zeta^*)M_0 + H_1J_-^\dagger(\zeta^*)M_0 \\ &= H_2M_0J_+^{-1}(\zeta) + H_1M_0J_-^{-1}(\zeta) = M_0 \left(H_2J_+^{-1}(\zeta) + H_1J_-^{-1}(\zeta) \right) = M_0P^-(\zeta). \end{aligned} \quad (4.2.32)$$

□

由 (4.2.18) 及 $J_\pm$ 定义易见

$$\det P^+ = \det(J_{+,1}, J_{+,2}, J_{-,3}) = \det J_+ \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & e^{-2\theta}s_{13} \\ 0 & 1 & e^{-2\theta}s_{23} \\ 0 & 0 & s_{33} \end{vmatrix} = s_{33}. \quad (4.2.33)$$

同理有 $\det(P^-) = \hat{s}_{33}$, 其中 $\hat{s}_{33} = (S^{-1})_{33}$.

4.2.3 RHP 及孤子解

至此我们得到一个 RHP,

定义 4.1 (相关 RH 问题)

由 $J_\pm, J_\pm^{-1}$ 的渐进性, 有

$$P^\pm \rightarrow I, \quad \zeta \rightarrow \infty, \quad \zeta \in \mathbb{C}_\pm \quad (4.2.34)$$

在实轴上, 其满足

$$P^-(x, t, \zeta)P^+(x, t, \zeta) = G(x, t, \zeta), \quad \zeta \in \mathbb{R} \quad (4.2.35)$$

其中跳跃矩阵

$$G = E(H_1 + H_2S(\zeta))(H_1 + S^{-1}(\zeta)H_2)E^{-1}. \quad (4.2.36)$$

♣

证明 考虑 $[J_-]_1$ 的 Neumann 级数有

$$c_1 = \int_{-\infty}^x D_1(x, y, \zeta)Q(y, t)c_0 dy = \int_{-\infty}^x D_1(x, y, \zeta)(0, 0, -r_1) dy = \int_{-\infty}^x (0, 0, -r_1 e^{2i\zeta(y-x)}) dy \quad (4.2.37)$$

由 Riemann-Lebesgue 引理, $r_1 \in L_1(\mathbb{R})$, 则 $c_1 \rightarrow 0, \zeta \rightarrow \infty$. 同理可得 $c_n \rightarrow 0, \zeta \rightarrow \infty$. 又由 $\|c_n\| \leq \omega^n/n!$, 故极限和求和可交换

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} [J_-]_1 = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{\zeta \rightarrow \infty} c_n = (1, 0, 0)^T \quad (4.2.38)$$

故可得 $J_{\pm}$ 的分列渐近, $J_{\pm}^{-1}$ 的分行渐近, 故 (4.2.34) 成立. 下证跳跃矩阵:

$$\begin{aligned} G &= (H_2 J_+^{-1} + H_1 J_-^{-1})(J_+ H_2 + J_- H_1) \\ &= H_2^2 + H_2 J_+^{-1} J_+ E S E^{-1} H_1 + H_1 J_-^{-1} J_- E S^{-1} E^{-1} H_2 + H_1^2 \\ &= H_2 + H_1 E S^{-1} E^{-1} H_2 + H_2 E S E^{-1} H_1 + H_1 \\ &= E(H_1 + H_2 S)(H_1 + S^{-1} H_2) E^{-1}. \end{aligned} \quad (4.2.39)$$

□

接下来只需寻找满足 (4.2.34) 及 (4.2.35) 的矩阵函数 $P^{\pm}(\zeta)$.

4.2.3.1 正则情形

若 $\forall \zeta \in \mathbb{C}_{\pm}$, $\det(P^{\pm}) \neq 0$, 且在实数轴上无奇点, 则为正则 RH 问题, 则由 Plemelj 公式有

$$(P^+)^{-1} = I + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{(I - G(\lambda))(P^+(\lambda))^{-1}}{\lambda - \zeta} d\lambda, \quad \zeta \in \mathbb{C}_+. \quad (4.2.40)$$

4.2.3.2 非正则情形

若 $\det(P^{\pm})$ 仅存在简单零点, 不妨设在 $\zeta = \zeta_k$ 处, $\det(P^{\pm}(\zeta_k)) = 0$. 为表示方便, 我们记

$$\{\zeta_k \in \mathbb{C}_+ : s_{33}(\zeta_k) = 0\}, \quad \{\bar{\zeta}_k \in \mathbb{C}_- : \hat{s}_{33}(\bar{\zeta}_k) = 0\}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (4.2.41)$$

均为简单零点, 则 $\ker(P^{\pm})$ 有唯一的特征向量 $v_k, \bar{v}_k$, 且满足

$$P^+(\zeta_k)v_k = 0, \quad \bar{v}_k P^-(\bar{\zeta}_k) = 0, \quad 1 \leq k \leq N. \quad (4.2.42)$$

接下来考虑消去零点结构, 构造 $\Omega := \{(x, t) : \det M(x, t) \neq 0\}$, 其中

$$M_{jk} = \frac{\bar{v}_j v_k}{\bar{\zeta}_j - \zeta_k}, \quad 1 \leq j, k \leq N. \quad (4.2.43)$$

构造单极点 Gamma 矩阵

$$\Gamma(\zeta) = I + \sum_{j,k=1}^N \frac{v_j (M^{-1})_{jk} \bar{v}_k}{\zeta - \bar{\zeta}_k}, \quad \Gamma^{-1}(\zeta) = I - \sum_{j,k=1}^N \frac{v_j (M^{-1})_{jk} \bar{v}_k}{\zeta - \zeta_j}. \quad (4.2.44)$$

由 (4.2.42) 可得 $\forall l \in 1, 2, \dots, N$,

$$\Gamma(\zeta_l)v_l = v_l - \sum_{j,k}^N v_j (M^{-1})_{jk} M_{kl} = 0, \quad \bar{v}_l \Gamma^{-1}(\bar{\zeta}_l) = \bar{v}_l - \sum_{j,k}^N M_{lj} (M^{-1})_{jk} \bar{v}_k = 0, \quad (4.2.45)$$

易见 $\Gamma\Gamma^{-1}$ 可能的极点仅为 $\zeta_l, \bar{\zeta}_l$, 且均为一阶极点. 由留数条件

$$\operatorname{Res}_{\zeta=\zeta_l}(\Gamma\Gamma^{-1}) = -\Gamma v_l \sum_{k=1}^N (M^{-1})_{lk} \bar{v}_k = 0, \quad \operatorname{Res}_{\zeta=\bar{\zeta}_l}(\Gamma\Gamma^{-1}) = \sum_{j=1}^N v_j (M^{-1})_{jl} \bar{v}_l \Gamma^{-1}(\bar{\zeta}_l) = 0, \quad (4.2.46)$$

由 (4.2.45) 可得: $\det \Gamma$ 在 ζ_l 处有简单零点, 在 $\bar{\zeta}_l$ 处有简单极点, 若记

$$h = \det \Gamma(\zeta) \prod_{l=1}^N \frac{\zeta - \bar{\zeta}_l}{\zeta - \zeta_l}, \quad (4.2.47)$$

则 h 恰好消去所有可能的零点和极点, 故为整函数. 由 $\Gamma \rightarrow I, \zeta \rightarrow \infty$ 可得 $h \rightarrow 1$, 由 Liouville 定理, $h \equiv 1$, 故

$$\det \Gamma(\zeta) = \prod_{l=1}^N \frac{\zeta - \zeta_l}{\zeta - \bar{\zeta}_l}. \quad (4.2.48)$$

定义 $\hat{P}^+ = P^+ \Gamma^{-1}$, $\hat{P}^- = \Gamma P^-$, 易见它们在 $\zeta_l, \bar{\zeta}_l$ 处无奇点, 且满足

$$\operatorname{Res}_{\zeta=\zeta_l} \hat{P}^+ = -P^+(\zeta_l)v_l \sum_{k=1}^N (M^{-1})_{lk} \bar{v}_k = 0, \quad \operatorname{Res}_{\zeta=\bar{\zeta}_l} \hat{P}^- = \sum_{j=1}^N v_j (M^{-1})_{jl} \bar{v}_l P^-(\bar{\zeta}_l) = 0. \quad (4.2.49)$$

且

$$\det \hat{P}^+ = \det P^+ \det \Gamma^{-1} = s_{33}(\zeta) \prod_{k=1}^N \frac{\zeta - \bar{\zeta}_k}{\zeta - \zeta_k}, \quad \det \hat{P}^- = \hat{s}_{33}(\zeta) \prod_{k=1}^N \frac{\zeta - \zeta_k}{\zeta - \bar{\zeta}_k}. \quad (4.2.50)$$

在各自零点取极限可得

$$\det \hat{P}^+(\zeta_l) = s'_{33}(\zeta_l)(\zeta_l - \bar{\zeta}_l) \prod_{k \neq l} \frac{\zeta_l - \bar{\zeta}_k}{\zeta_l - \zeta_k} \neq 0, \quad \det \hat{P}^-(\bar{\zeta}_l) = \hat{s}'_{33}(\bar{\zeta}_l)(\bar{\zeta}_l - \zeta_l) \prod_{k \neq l} \frac{\bar{\zeta}_l - \zeta_k}{\bar{\zeta}_l - \bar{\zeta}_k} \neq 0. \quad (4.2.51)$$

其中 $s'_{33}(\zeta_l)$ 表示在 $\zeta = \zeta_l$ 处的导数. 故 $\hat{P}^\pm$ 在 $\mathbb{C}_\pm$ 中解析无奇点, 连续到实轴, 且满足

$$\begin{aligned} \hat{P}^\pm &\rightarrow I, \quad \zeta \rightarrow \infty, \quad \zeta \in \mathbb{C}_\pm, \\ \hat{P}^- \hat{P}^+ &= \Gamma G \Gamma^{-1} := \hat{G}, \quad \zeta \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (4.2.52)$$

由上式可得 $I - \hat{G} = \Gamma(I - G)\Gamma^{-1} \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. 由正则 RH 问题的唯一性可得 $\hat{P}^\pm$ 唯一存在, 同样有 Plemelj 公式

$$(\hat{P}^+)^{-1}(\zeta) = I + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{(I - \hat{G}(\lambda))(\hat{P}^+(\lambda))^{-1}}{\lambda - \zeta} d\lambda, \quad \zeta \in \mathbb{C}_+. \quad (4.2.53)$$

对 P^+ 利用 Taylor 展开

$$P^+(x, t, \zeta) = I + \frac{1}{\zeta} P_1^+(x, t) + O(\zeta^{-2}), \quad \zeta \rightarrow \infty \quad (4.2.54)$$

将其带入 (4.2.3) 比较 ζ^0 的系数可得

$$Q = i[\Lambda, P_1^+] = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2iP_{13} \\ 0 & 0 & 2iP_{23} \\ -2iP_{31} & -2iP_{32} & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.2.55)$$

其中 $P_1^+ = (P_{ij})$,

4.2.4 N 孤子解

为找到孤子解, 考虑无反射势情形, 即令 $G = I$, 有 $\hat{G} = I$. 此时 $\hat{P}^- = I, (\zeta \in \mathbb{C}_-)$, 和 $\hat{P}^+ = I, (\zeta \in \mathbb{C}_+)$, 则 $P^+ = \Gamma, P^- = \Gamma^{-1}$, 故

$$P^+(\zeta) = I + \sum_{j,k=1}^N \frac{v_j (M^{-1})_{jk} \bar{v}_k}{\zeta - \bar{\zeta}_k}, \quad M_{jk} = \frac{\bar{v}_j v_k}{\bar{\zeta}_j - \zeta_k} \quad (4.2.56)$$

为找出 $v_k(x, t, \zeta)$, 将 $P^+ v_k = 0$ 带入 (4.2.3)-(4.2.4) 得

$$\begin{aligned} P_x^+ &= -i\zeta[\Lambda, P^+] + QP^+, & P^+(\zeta_k, x) \left(\frac{\partial v_k}{\partial x} + i\zeta_k \Lambda v_k \right) &= 0, & v_{kx} &= -i\zeta_k \Lambda v_k, \\ P_t^+ &= 2i\zeta^2[\Lambda, P^+] + RP^+, & P^+(\zeta_k, x) \left(\frac{\partial v_k}{\partial t} - 2i\zeta_k^2 \Lambda v_k \right) &= 0, & v_{kt} &= 2i\zeta_k^2 \Lambda v_k. \end{aligned} \quad (4.2.57)$$

则 $v_k(x, t, \zeta) = E v_{k0}$, 其中 v_{k0} 为常向量, 同理可得 $\bar{v}_k(x, t, \bar{\zeta}) = v_{k0}^\dagger M_0 E^*$, 则

$$p(x, t) = -2iP_{13} = -2i \left(\sum_{j,k=1}^N v_j (M^{-1})_{jk} \bar{v}_k \right)_{13} \quad (4.2.58)$$

其余 q, r_1, r_2 类似. 不失一般性, 可取 $v_{k0} = (\vec{a}, 1) = (\alpha_k, \beta_k, 1)^T$, 则

$$p(x, t) = -2i \sum_{j,k=1}^N \alpha_k e^{-(\theta_k^* - \theta_j)} (M^{-1})_{jk}, \quad (4.2.59)$$

4.3 逆空间约化情形

或许读者会问, 相较于上一章节 2×2 在原方程做变换, 对 3×3 情形在原方程和伴随问题下做变换, 并直接取等价是否正确? 我们将以逆空间情形为例, 利用传统 RH 方法进行求解, 并最后证明二者的等价性, 然后在下节直

接给出三个定理及简要证明.

4.3.1 对称性

由于仅有耦合 NLS 和逆空间 NLS 仅有对称性不同, 故我们仅给出对称性证明为表示方便, 我们记 $\phi_{\pm} = J_{\pm}E$, 则 $\phi_{\pm}$ 为 Lax 对 (4.1.1) 的解, 且满足对称关系

$$\phi_- = \phi_+ S(\zeta) \implies J_- E = J_+ E S(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{R}, \quad (4.3.1)$$

则由于 $\det(J_{\pm}) = 1$, 则 $\det(S(\zeta)) = 1$. 且

$$P_o^+ = ([\phi_+]_1, [\phi_+]_2, [\phi_-]_3) E^{-1} = ([J_+]_1, [J_+]_2, [J_-]_3) = J_+ H_2 + J_- H_1, \quad \zeta \in \mathbb{C}_+, \quad (4.3.2)$$

$$P_o^- = ([\phi_-]_1, [\phi_-]_2, [\phi_+]_3) E^{-1} = ([J_-]_1, [J_-]_2, [J_+]_3) = J_- H_2 + J_+ H_1, \quad \zeta \in \mathbb{C}_- \quad (4.3.3)$$

这里不同于耦合 NLS, 我们约定记号 $P_o^{\pm}$ 表示为原谱问题的列解组成的矩阵. $P_a^{\pm}$ 表示为伴随谱问题的行解组成的矩阵.

接下来我们考虑伴随问题

$$K_x = -i\zeta[\Lambda, K] - KQ. \quad (4.3.4)$$

由原问题及伴随问题关系, 可得 J^{-1} 亦为伴随问题的解, 若设

$$\phi_{\pm}^{-1} = E^{-1} J_{\pm}^{-1} = (\hat{\phi}_{\pm,1}, \hat{\phi}_{\pm,2}, \hat{\phi}_{\pm,3})^T, \quad (4.3.5)$$

重复上述步骤有

$$[\hat{\phi}_+]_1, [\hat{\phi}_+]_2, [\hat{\phi}_-]_3 \in \mathbb{C}_-, \quad [\hat{\phi}_-]_1, [\hat{\phi}_-]_2, [\hat{\phi}_+]_3 \in \mathbb{C}_+, \quad (4.3.6)$$

则

$$P_a^+ = E([\hat{\phi}_-]_1, [\hat{\phi}_-]_2, [\hat{\phi}_+]_3)^T = ([J_-^{-1}]_1, [J_-^{-1}]_2, [J_+^{-1}]_3)^T = H_2 J_-^{-1} + H_1 J_+^{-1}, \quad \zeta \in \mathbb{C}_+, \quad (4.3.7)$$

$$P_a^- = E([\hat{\phi}_+]_1, [\hat{\phi}_+]_2, [\hat{\phi}_-]_3)^T = ([J_+^{-1}]_1, [J_+^{-1}]_2, [J_-^{-1}]_3)^T = H_2 J_+^{-1} + H_1 J_-^{-1}, \quad \zeta \in \mathbb{C}_-. \quad (4.3.8)$$

易见如下结论:

命题 4.2 (对称关系)

逆空间 NLS 方程满足如下对称关系

$$M_1 J_{\pm}^{-1} = J_{\mp}^{\dagger}(-x, t, -\zeta^*) M_1, \quad S^{\dagger}(-\zeta^*) = M_1 S M_1^{-1} \quad (4.3.9)$$

我们约定符号 $(f(-x, t))_x = \frac{df(-x)}{dx}$, 其中 $f_x(-x)$ 仅作为符号, 不为求导运算.

证明 对 (4.2.3) 两边做 $x \rightarrow -x, \zeta \rightarrow -\zeta^*$, 有

$$LHS = (J_+(-x, t, -\zeta^*))_x = \frac{\partial J(g, t, -\zeta^*)}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial x} = -J_{+,x}(-x, t, -\zeta^*), \quad g = -x, \quad (4.3.10)$$

$$RHS = i\zeta^*[\Lambda, J_+(-x, t, -\zeta^*)] + Q(-x)J_+(-x, t, -\zeta^*).$$

两边同时做 Hermitian 转置,

$$J_{+,x}^{\dagger}(-x, t, -\zeta^*) = -i\zeta[\Lambda, J_+^{\dagger}(-x, t, -\zeta^*)] + J_+^{\dagger}(-x, t, -\zeta^*)Q^{\dagger}(-x). \quad (4.3.11)$$

由于 $Q^{\dagger}(-x) = M_1 Q(x) M_1^{-1}$, 则

$$\begin{aligned} J_{+,x}^{\dagger}(-x, t, -\zeta^*) &= -i\zeta[\Lambda, J_+^{\dagger}(-x, t, -\zeta^*)] + J_+^{\dagger}(-x, t, -\zeta^*) M_1 Q(x) M_1^{-1} \\ \implies J_{+,x}^{\dagger}(-x, t, -\zeta^*) M_1 &= -i\zeta[\Lambda, J_+^{\dagger}(-x, t, -\zeta^*) M_1] + J_+^{\dagger}(-x, t, -\zeta^*) M_1 Q(x), \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

与 (4.3.4) 作比较, 可得 $J_+^{\dagger}(-x, t, -\zeta^*) M_1 = C J_-^{-1}(x, t, \zeta)$, 其中 C 为常数矩阵, 由边界条件可取 $C = M_1$, 则

$$M_1 J_+^{-1}(x, t, \zeta) = J_-^{\dagger}(-x, t, -\zeta^*) M_1. \quad (4.3.13)$$

由 $J_-E = J_+ES(\zeta)$, 可得

$$S^\dagger(-\zeta^*) = \left(E^{-1}(-x, t, -\zeta^*) J_+^{-1}(-x, t, -\zeta^*) J_-(-x, t, -\zeta^*) E(-x, t, -\zeta^*) \right)^\dagger. \quad (4.3.14)$$

由 $E^\dagger(-x, t, -\zeta^*) = E^{-1}$, 则

$$\begin{aligned} S^\dagger(-\zeta^*) &= E^{-1} J_-^\dagger(-x, t, -\zeta^*) (J_+^{-1}(-x, t, -\zeta^*))^\dagger E \\ &= E^{-1} M_1 J_+^{-1}(x, t, \zeta) M_1^{-1} M_1 J_-(x, t, \zeta) M_1^{-1} E \\ &= M_1 E^{-1} J_+^{-1} J_- E M_1^{-1} \\ &= M_1 S(\zeta) M_1^{-1}. \end{aligned} \quad (4.3.15)$$

□

利用上面对称关系, 可得

命题 4.3 ($P_o^\pm$ 与 $P_a^\pm$ 对称关系)

$$M_1 P_a^\pm(x, t, \zeta) = (P_o^\pm(-x, t, -\zeta^*))^\dagger M_1, \quad \zeta \in \mathbb{C}_\pm. \quad (4.3.16)$$

证明

$$\begin{aligned} M_1 P_a^+ &= M_1 (H_2 J_-^{-1} + H_1 J_+^{-1}) = H_2 M_1 J_-^{-1} + H_1 M_1 J_+^{-1} \\ &= H_2 J_+^\dagger(-x, t, -\zeta^*) M_1 + H_1 J_-^\dagger(-x, t, -\zeta^*) M_1 \\ &= (H_2 J_+^\dagger(-x, t, -\zeta^*) + H_1 J_-^\dagger(-x, t, -\zeta^*)) M_1 \\ &= (P_o^+(-x, t, -\zeta^*))^\dagger M_1. \end{aligned} \quad (4.3.17)$$

□

标准 RH 方法中的 $P^\pm$ 与本问题中的 $P_o^\pm$ 和 $P_a^\pm$ 有如下对应关系:

$$P^+ = P_o^+, \quad P^- = P_a^-, \quad (4.3.18)$$

为表示方便, 我们接下来仍以 $P^\pm$ 表示.

同样的, 我们仍可得到类似于 (4.2.42) 的对称关系, 但请注意其对称性仅限 $P_o^\pm$ 与 $P_a^\pm$, 仅限于同半平面,

$$\begin{aligned} P_o^+(\zeta_k) v_k &= 0, \quad \hat{v}_k P_a^+(\hat{\zeta}_k) = 0, \\ P_o^-(\hat{\zeta}_k) \hat{v}_k &= 0, \quad \bar{v}_j P_a^-(\bar{\zeta}_j) = 0. \end{aligned} \quad (4.3.19)$$

利用对称关系 (4.3.9) 可得

$$(P_o^+(-x, t, -\zeta^*))^\dagger = M_1 P_a^+(x, t, \zeta) M_1^{-1} \quad (4.3.20)$$

则两边同左乘 $v_k^\dagger(-x, t, -\zeta^*)$ 有

$$v_k(-x, t, -\zeta^*)^\dagger (P_o^+(-x, t, -\zeta^*))^\dagger = v_k^\dagger(-x, t, -\zeta^*) M_1 P_a^+(x, t, \zeta) = 0 \quad (4.3.21)$$

与 $\hat{v}_k P_a^+ = 0$ 比较有 $\hat{v}_k = v_k^\dagger(-x, t, -\zeta^*) M_1$. 同理有 $\hat{v}_k = M_1^{-1} \bar{v}_k^\dagger(-x, t, -\zeta^*)$.

利用命题 4.3 的对称关系有 $\hat{v}_k = (v_k(-x, t, -\zeta^*))^\dagger M_1$, 则

$$\hat{v}_k = v_{k0}^\dagger E^{-1} M_1 \quad \hat{v}_k = M_1^{-1} E \bar{v}_{k0}^\dagger. \quad (4.3.22)$$

注 这里是因为 $[\theta(-x, t, -\zeta^*)]^* = -\theta_k$, 和 $M_1^\dagger = M_1$.

至此, 我们已使用标准 RH 方法求解逆空间 NLS 方程形式上的 N 孤子解, 但是缺少 $v_k, \bar{v}_k$ 的具体形式和约束条件, 下面我们考虑这一点.

4.3.1.1 特征向量约束关系

现在我们考虑同半平面关系标准无反射公式 (4.2.56) 中 P^+ 的列核 v_k 与 P^- 的行核 $\bar{v}_j$ 的关系.

由于逆空间约化不联系 $\mathbb{C}_\pm$, 一般不能将 $\bar{v}_j$ 逐项写成 v_j 的某种形式. 离散向量的正确限制应从重构势满足非

局域约化这一条件得到, 考虑 P_1^+ 的非对角元

$$P_{1,off}^+ = \begin{pmatrix} 0 & C_{12} \\ C_{21} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.3.23)$$

则

$$\begin{aligned} C_{12}(x, t) &= \sum_{j,k=1}^N e^{-\theta_j} (\alpha_j, \beta_j)^T (M^{-1})_{jk} \bar{\gamma}_k e^{\bar{\theta}_k} \\ C_{21}(x, t) &= \sum_{j,k=1}^N e^{\theta_j} \gamma_j (M^{-1})_{jk} (\bar{\alpha}_k, \bar{\beta}_k) e^{-\bar{\theta}_k} \end{aligned} \quad (4.3.24)$$

由 $Q = i[\Lambda, P_1^+]$ 可得

$$(p, q)^T = -2iC_{12}, \quad (r_1, r_2) = 2iC_{21}. \quad (4.3.25)$$

由 $Q^\dagger(-x) = M_1 Q(x) M_1^{-1}$ 可得

$$C_{21}(x, t) = -C_{12}^\dagger(-x, t)A. \quad (4.3.26)$$

将上式联立可得如下关系

$$\sum_{j,k=1}^N \gamma_j e^{\theta_j + \theta_k} (M^{-1})_{jk}(x, t) (\bar{\alpha}_k, \bar{\beta}_k) = - \sum_{j,k=1}^N \gamma_j^* e^{\bar{\theta}_k + \theta_j} (M^{-1})_{jk}^*(-x, t) (\alpha_k^*, \beta_k^*)^T A \quad (4.3.27)$$

至此我们终于得到同时涉及 $\mathbb{C}_\pm$ 的离散谱向量关系.

4.3.1.2 单孤子解

现在我们考虑 $N = 1$ 情形, 为表示方便我们做如下约定

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= i\eta_1 \in i\mathbb{R}_+, \quad v_1 = (\vec{a}_1 e^{-\theta_1}, c_1 e^{\theta_1})^T \\ \bar{\zeta}_1 &= i\bar{\eta}_1 \in i\mathbb{R}_-, \quad \bar{v}_1 = (\vec{b}_1 e^{\bar{\theta}_1}, d_1 e^{-\bar{\theta}_1}) \\ \theta_1 &= \eta_1 x - 2i\eta_1^2 t, \quad \bar{\theta}_1 = \bar{\eta}_1 x - 2i\bar{\eta}_1^2 t \end{aligned} \quad (4.3.28)$$

则易见 $\theta(-x)^* = -\theta(x)$, $\bar{\theta}(-x)^* = -\bar{\theta}(x)$, 其中 $\vec{a}_1$ 为 1×2 列向量, $\vec{b}_1$ 为 2×1 行向量.

不失一般性可取 $c_1 = d_1 = 1$, 则有

$$M_{11} = \frac{\bar{v}_1 v_1}{\bar{\zeta}_1 - \zeta_1} = \frac{\vec{b}_1 \vec{a}_1 e^{-(\theta_1 - \bar{\theta}_1)} + e^{\theta_1 - \bar{\theta}_1}}{i(\bar{\eta}_1 - \eta_1)} = \frac{D_{11}}{i(\bar{\eta}_1 - \eta_1)} \quad (4.3.29)$$

其中 $D_{jk}(x) = \rho_{jk} e^{-(\theta_k - \bar{\theta}_j)} + e^{\theta_k - \bar{\theta}_j}$, $\rho_{jk} = \vec{b}_j \vec{a}_k$, 则可得

$$\begin{aligned} C_{12}(x, t) &= e^{-(\theta_1 + \bar{\theta}_1)} \vec{a}_1 M_{11}^{-1} = \frac{i(\bar{\eta}_1 - \eta_1)}{D_{11}} \vec{a}_1 e^{-(\theta_1 + \bar{\theta}_1)}, \\ C_{21}(x, t) &= e^{\theta_1 + \bar{\theta}_1} \vec{b}_1 M_{11}^{-1} = \frac{i(\bar{\eta}_1 - \eta_1)}{D_{11}} \vec{b}_1 e^{\theta_1 + \bar{\theta}_1}. \end{aligned} \quad (4.3.30)$$

将上式代入 (4.3.26) 可得

$$\begin{aligned} -C_{12}^\dagger(-x)A &= \frac{i(\bar{\eta}_1 - \eta_1)}{D_{11}^*(-x)} \vec{a}_1^\dagger e^{\theta_1 + \bar{\theta}_1} A_1 \\ C_{21}(x) &= \frac{i(\bar{\eta}_1 - \eta_1)}{D_{11}(x)} \vec{b}_1 e^{\theta_1 + \bar{\theta}_1} \end{aligned} \implies \frac{\vec{b}_1}{D_{11}(x)} = \frac{\vec{a}_1^\dagger A_1}{D_{11}^*(-x)}. \quad (4.3.31)$$

记 $z = e^{\theta_1 - \bar{\theta}_1}$, 则 $D_{11}(x) = \rho_{11} z^{-1} + z$, $D_{11}^*(-x) = \rho_{11}^* z + z^{-1}$, 则有

$$\vec{b}_1 (\rho_{11}^* z + z^{-1}) = \vec{a}_1^\dagger A_1 (\rho_{11} z^{-1} + z) \quad (4.3.32)$$

比较 z 的次数有

$$\begin{aligned} \vec{b}_1 \rho_{11}^* &= \vec{a}_1^\dagger A_1, \\ \vec{b}_1 &= \vec{a}_1^\dagger A_1 \rho_{11} \end{aligned} \implies |\rho_{11}|^2 = 1 \implies \rho_{11} = e^{i\omega}, \omega \in \mathbb{R}. \quad (4.3.33)$$

又由于 $\rho_{11} = \vec{b}_1 \vec{a}_1$, 则有

$$\rho_{11} = \vec{b}_1 \vec{a}_1 = \frac{1}{\rho_{11}^*} \vec{a}_1^\dagger A_1 \vec{a}_1 \implies \vec{a}_1^\dagger A_1 \vec{a}_1 = 1. \quad (4.3.34)$$

则有

$$\vec{a}_1^\dagger A_1 \vec{a}_1 = 1, \quad \vec{b}_1 = \rho_{11} \vec{a}_1^\dagger A_1, \quad |\rho_{11}| = 1 \quad (4.3.35)$$

对于单孤子情形, 只需满足 $\eta = -\bar{\eta}$, 则为有界到边界 (无增减性) 的孤子.

4.3.1.3 多孤子解

接下来我们考虑平衡谱意义下的多孤子解,

$$\begin{aligned} M_{jk} &= \frac{(\vec{b}_j \bar{E}(\bar{\zeta}_j)) E(\zeta_k) (\vec{a}_k, 1)^T}{\bar{\zeta}_j - \zeta_k} = \frac{\rho_{jk} e^{\theta(\bar{\zeta}_j) + \theta(\zeta_k)} + e^{-(\theta(\bar{\zeta}_j) + \theta(\zeta_k))}}{\bar{\zeta}_j - \zeta_k}, \\ M_{jk}^*(-x, t, -\zeta_k^*) &= \frac{(\vec{b}_j^* E^*(-x, t, -\zeta_j^*)) (E^{-1}(-x, t, -\zeta_k^*))^* (\vec{a}_k^*, 1)^T}{(-\zeta_j^* + \zeta_k^*)^*} \\ &= \frac{\rho_{jk}^* e^{-(\theta(\bar{\zeta}_j) + \theta(\zeta_k))} + e^{\theta(\bar{\zeta}_j) + \theta(\zeta_k)}}{-(\bar{\zeta}_j - \zeta_k)}. \end{aligned} \quad (4.3.36)$$

易见若设 $|\rho_{jk}| = 1$, 则有

$$M_{jk}^*(-x, t, -\zeta_k^*) = \frac{e^{\theta(\bar{\zeta}_j) + \theta(\zeta_k)} + \rho_{jk} e^{-(\theta(\bar{\zeta}_j) + \theta(\zeta_k))}}{-\rho_{jk} (\bar{\zeta}_j - \zeta_k)} = -\frac{1}{\rho_{jk}} M_{jk}(x, t, \zeta_k) \quad (4.3.37)$$

进一步, 若设

$$v_{k0} = v_0 = (\alpha, \beta, 1)^T, \quad \bar{v}_{j0} = \bar{v}_0 = (\bar{\alpha}, \bar{\beta}, 1), \quad \forall j, k \in 1, 2, \dots, N \quad (4.3.38)$$

此时 $\rho_{jk} = \rho_0 = \bar{\alpha}\alpha + \bar{\beta}\beta$, 且 $|\rho_0| = 1$, 则有

$$M_{jk}^*(-x, t, -\zeta_k^*) = -\frac{1}{\rho_0} M_{jk}(x, t, \zeta_k) \implies M^{-1}(-x, t, -\zeta_k^*) = -\rho_0 M^{-1}(x, t, \zeta_k), \quad (4.3.39)$$

带入

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p^*(-x, t) \\ q^*(-x, t) \end{pmatrix} &= 2iC_{12}^*(-x, t, -\zeta_k^*) = 2i \sum_{j,k=1}^N \left(e^{-(\theta_j + \bar{\theta}_k)} \vec{a}_{j0} (M^{-1})_{jk}(-x, t, -\zeta_k^*) \right)^* \\ &= -2i\rho_0 \sum_{j,k=1}^N e^{-(\theta_j + \bar{\theta}_k)} \vec{a}_{j0}^* (M^{-1})_{jk} \end{aligned} \quad (4.3.40)$$

再利用 (4.3.26) 可得

$$(r_1, r_2) = -(p^*(-x, t), q^*(-x, t)) A_1 = 2i\rho_0 \sum_{j,k=1}^N e^{-(\theta_j + \bar{\theta}_k)} (M^{-1})_{jk} \vec{a}_{j0}^\dagger A_1 \quad (4.3.41)$$

则有

$$\vec{b}_{j0} = \vec{a}_{j0}^\dagger A_1 \implies \bar{v}_{k0} = v_{k0}^\dagger M_0. \quad (4.3.42)$$

且满足 $\bar{v}_0 v_0 = 1 + \rho_0$.

4.3.2 特征函数对称性与 RH 方法等价性

接下来我们证明利用特征函数对称性得到的特征值和特征向量与 RH 方法得到的结果等价, 也即证明下一节中定理的正确性.

考虑特征值和伴随特征值问题

$$\begin{aligned} Y_x &= -i\zeta \Lambda Y + QY, \\ K_x &= i\zeta K \Lambda - KQ. \end{aligned} \quad (4.3.43)$$

的特征向量分别为 v'_k 和 $\bar{v}'_k$. 不失一般性, 我们仅考虑驻定情形.

$$\begin{aligned} P^+(\zeta_k)v_k &= ([\phi_+]_1, [\phi_+]_2, [\phi_-]_3)E^{-1}v_k = ([\phi_+]_1, [\phi_+]_2, [\phi_-]_3)E^{-1}Ev_{k0} = 0, \\ &= \alpha_k[\phi_+]_1 + \beta_k[\phi_+]_2 + \gamma_k[\phi_-]_3 = 0. \end{aligned} \quad (4.3.44)$$

其中

$$[\phi_+]_1 \sim (e^{i\zeta_k x}, 0, 0)^T, \quad [\phi_+]_2 \sim (0, e^{i\zeta_k x}, 0)^T, \quad x \rightarrow +\infty, \quad [\phi_-]_3 \sim (0, 0, e^{-i\zeta_k x})^T, \quad x \rightarrow -\infty \quad (4.3.45)$$

又由于

$$Y_{kx} \sim -i\zeta_k \Lambda Y_k \implies Y_k = e^{-i\zeta_k x \Lambda} c_{\pm} \quad x \rightarrow \pm\infty \quad (4.3.46)$$

其中 $c_{\pm}$ 为常向量, 利用离散谱条件有

$$Y_k \rightarrow (\alpha'_k e^{i\zeta_k x}, \beta'_k e^{i\zeta_k x}, 0)^T, \quad x \rightarrow +\infty, \quad Y_k \rightarrow (0, 0, -\gamma'_k e^{-i\zeta_k x})^T, \quad x \rightarrow -\infty. \quad (4.3.47)$$

可设 $c_+ = (\alpha'_k, \beta'_k, 0)^T$, $c_- = (0, 0, -\gamma'_k)^T$, 则在 $x \in \mathbb{R}$ 上有

$$Y_k = \alpha'_k[\phi_+]_1 + \beta'_k[\phi_+]_2 = -\gamma'_k[\phi_-]_3 \quad (4.3.48)$$

则有

$$\alpha'_k[\phi_+]_1 + \beta'_k[\phi_+]_2 + \gamma'_k[\phi_-]_3 = 0 \quad (4.3.49)$$

故 (4.3.44) 与 (4.3.49) 等价, 故 $v_{k0} = cv'_{k0}$, 不失一般性, 可令 $c = 1$, 则 $\alpha_k = \alpha'_k, \beta_k = \beta'_k, \gamma_k = \gamma'_k$, 也即 RH 方法得到的孤子解与特征函数对称性得到的孤子解等价.

现在我们可以对问题 3.1 做肯定的回答. 利用特征值问题得到的对称关系和 RH 方法得到的对称关系是相同的, 而且不但可以对原问题求对称性, 也可同时联立原问题和伴随问题求解对称性.

4.4 三种约化下的散射数据对称性

本节我们仿照上一章节, 先考虑 (4.1.9)-(4.1.11) 三种约化下的散射数据对称性. 下一节考虑增加二重约化 (4.1.12)-(4.1.14) 时的散射数据对称性.

4.4.1 三种约化对称性

为表示方便, 我们约定符号 $\zeta_k \in \mathbb{C}_+$, $\bar{\zeta}_k \in \mathbb{C}_-$ 为离散特征值, $v_{k0}, \bar{v}_{k0}$ 为对应的特征向量. $\hat{\zeta}, \hat{\bar{\zeta}}$ 为我们通过对称关系找到的特征值

定理 4.1 (逆空间)

对于逆空间 NLS 方程 (4.1.30)-(4.1.31), 如果 ζ 是一个特征值, 则 $-\zeta^*$ 也是一个特征值. 因此, 非纯虚特征值总是以 $(\zeta, -\zeta^*)$ 的形式成对出现, 它们位于复平面的同一半平面. 对称关系如下:

$$C_{21}(x, t) = -C_{12}^\dagger(-x, t)A_1. \quad (4.4.1)$$

特别的, 若设

$$v_{j0} = v_0 = (\vec{a}, 1)^T, \quad \bar{v}_{k0} = \bar{v}_0 = (\vec{b}, 1), \quad \forall j, k \in 1, 2, \dots, N \quad (4.4.2)$$

则满足 $\vec{b} = \rho \vec{a}^\dagger A_1$, 且 $\bar{v}_{k0} v_{j0} = 1 + \rho_0$, 其中 $\rho_0 = \vec{b} \vec{a}$, 且 $|\rho_0| = 1$.

进一步当上下半平面各包含一个纯虚特征值时, 必有

$$\zeta_1 = i\eta_1 \in i\mathbb{R}_+, \quad \bar{\zeta}_1 = i\bar{\eta}_1 \in i\mathbb{R}_-, \quad v_{10} = (\vec{a}_1, 1)^T, \quad \bar{v}_{10} = (\vec{b}_1, 1), \quad (4.4.3)$$

满足

$$\vec{b}_1 = \rho_{11} \vec{a}_1^\dagger A_1, \quad \vec{a}_1^\dagger A_1 \vec{a}_1 = 1, \quad |\rho_{11}| = 1. \quad (4.4.4)$$

在证明开始之前, 我们仿照上一章节, 先建立离散数据之间的关系.

考虑离散数据 $\{\zeta_k, \bar{\zeta}_k, \alpha_k, \beta_k, \bar{\alpha}_k, \bar{\beta}_k, \gamma_k, \bar{\gamma}_k, 1 \leq k \leq N\}$ 及原谱问题 $Y_x = MY$ 和伴随谱问题 $K_x = -KM$

$$Y_x = -i\zeta\Lambda Y + QY, \quad (4.4.5)$$

$$K_x = i\zeta K\Lambda - KQ, \quad (4.4.6)$$

考虑驻定情形, 其中

$$Q(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p(x, 0) \\ 0 & 0 & q(x, 0) \\ -r_1(x, 0) & -r_2(x, 0) & 0 \end{pmatrix} \quad (4.4.7)$$

这里 $p(x, 0), q(x, 0), r_1(x, 0), r_2(x, 0)$ 分别为 $p(x, t), q(x, t), r_1(x, t), r_2(x, t)$ 在 $t = 0$ 时的初值. 离散散射数据与离散特征值及特征向量的关系如下: 若 $\zeta_k \in \mathbb{C}_+$ 为原谱问题 (4.4.5) 的离散特征值, 则存在非零向量 $v_{k0} = (\alpha_k, \beta_k, \gamma_k)^T$, 使得对应的离散特征函数 $Y_k(x)$ 满足

$$Y_k(x) \rightarrow (\alpha_k e^{i\zeta_k x}, \beta_k e^{i\zeta_k x}, 0)^T, \quad x \rightarrow +\infty, \quad (4.4.8)$$

$$Y_k(x) \rightarrow (0, 0, -\gamma_k e^{-i\zeta_k x})^T, \quad x \rightarrow -\infty \quad (4.4.9)$$

同理, 若 $\bar{\zeta}_k \in \mathbb{C}_-$ 为伴随谱问题 (4.4.6) 的离散特征值, 则存在非零向量 $\bar{v}_{k0} = (\bar{\alpha}_k, \bar{\beta}_k, \bar{\gamma}_k)$, 使得对应的离散特征函数 $K_k(x)$ 满足

$$K_k(x) \rightarrow (\bar{\alpha}_k e^{-i\bar{\zeta}_k x}, \bar{\beta}_k e^{-i\bar{\zeta}_k x}, 0), \quad x \rightarrow +\infty, \quad (4.4.10)$$

$$K_k(x) \rightarrow (0, 0, -\bar{\gamma}_k e^{i\bar{\zeta}_k x}), \quad x \rightarrow -\infty \quad (4.4.11)$$

鉴于此联系, 为了推导 (离散) 散射数据的对称关系, 我们将利用特征值问题中离散特征模的对称关系 (4.4.5)-(4.4.6).

证明 此时 $r_1 = ap^*(-x) + b^*q^*(-x), r_2 = b^*p^*(-x) + dq^*(-x)$, 容易发现 $Q^\dagger(-x) = M_1 Q M_1^{-1}$, 所以我们对 (4.4.5) 式先共轭转置, 再进行变量替换 $x \rightarrow -x$, 则有

$$Y_x = -i\zeta\Lambda Y + QY \implies -Y_x(-x) = -i\zeta\Lambda Y(-x) + Q(-x)Y(-x) \quad (4.4.12)$$

两边同时做 Hermitian 转置有

$$-Y_x^\dagger(-x) = i\zeta^* Y^\dagger(-x)\Lambda + Y^\dagger(-x)Q^\dagger(-x) = i\zeta^* Y^\dagger(-x)\Lambda + Y^\dagger(-x)M_1 Q(x)M_1^{-1}, \quad (4.4.13)$$

故

$$\hat{Y}_x(x) = \hat{Y}(x)(i\hat{\zeta}\Lambda - Q(x)) \quad (4.4.14)$$

其中

$$\hat{Y}(x) = Y(-x)^\dagger M_1, \quad \hat{\zeta} = -\zeta^*, \quad (4.4.15)$$

故 (4.4.14) 显示若 $\zeta_k \in \mathbb{C}_+$ 为散射问题 (4.4.5) 的特征值, 则 $\hat{\zeta}_k = -\zeta_k^* \in \mathbb{C}_+$ 亦为特征值. 此外, ζ_k 的特征函数 $Y_k(x)$ 与 ζ_k 的特征函数 $Y_k(x)$ 之间满足关系式 (4.4.15). 但是注意到 $(\zeta, -\zeta^*)$ 属于同半平面, 故未能联系起 $P^\pm$ 及对应特征向量. 我们需要通过约化关系及 $P^\pm$ 定义求解, 具体证明过程见 4.3.1.1 小节. $\square$

定理 4.2 (逆时间)

这种情况下 $b = c, p_1 = p(-t), q_1 = q(-t)$

对于逆时间 NLS 方程 (4.1.37)-(4.1.38). 若 ζ 是特征值, 则 $-\zeta$ 也是特征值. 因此, 离散谱关于原点对称, 特征值总是以 $(\zeta, -\zeta)$ 的形式成对出现, 位于复平面的相对半平面中.

若 $\zeta_k \in \mathbb{C}_+$ 且 $\bar{\zeta}_k = -\zeta_k \in \mathbb{C}_-$, 其对应的特征向量 v_{k0} 和 $\bar{v}_{k0}$ 满足关系 $\bar{v}_{k0} = v_{k0}^T M_2$.

证明 显然有 $Q^T(x, -t) = -M_2 Q(x, -t) M_2^{-1}$, 对 (4.4.5) 同时转置, 对 Lax 对做替换 $t \rightarrow -t$ 得并转置得

$$Y_x^T(x, -t) = -i\zeta Y^T(x, -t)\Lambda + Y^T(x, -t)Q^T(x, -t) = i\zeta Y^T(x, -t)\Lambda - Y^T(x, -t)M_2 Q(x, t)M_2^{-1} \quad (4.4.16)$$

两边同右乘 M_2 有

$$Y_x^T(x, -t)M_2 = -i\zeta Y^T(x, -t)\Lambda M_2 - Y^T(x, -t)M_2 Q(x, -t) \quad (4.4.17)$$

则有

$$\hat{Y}_x(x, t) = -\hat{Y}(x, t)(i\hat{\zeta}\Lambda + Q(t)), \quad \hat{Y}(t) = Y(-t)^T M_2, \quad \hat{\zeta} = -\zeta \quad (4.4.18)$$

这意味着 $(\hat{\zeta}, \hat{Y}(t))$ 满足伴随特征值问题. 因此, 若 $\zeta_k \in \mathbb{C}_+$ 为原问题的特征值, 则 $\hat{\zeta}_k = -\zeta_k \in \mathbb{C}_-$ 亦为伴随散射问题的特征值, 故 $\hat{v}_k = v_k^T M_2$. $\square$

注 注意逆时间得到的对称关系为 $\hat{\zeta} = -\zeta$, 联系了 $C_\pm$ 的特征值, 这是其与逆空间, 逆时空最大的不同.

定理 4.3 (逆时空)

这种情形下 $b = c, p_1 = p(-x, -t), q_1 = q(-x, -t)$

对于逆时空方程 (4.1.46)-(4.1.47), $\zeta \in \mathbb{C}_+$ 可以为任意值, 且 $\bar{\zeta} \in \mathbb{C}_-$ 亦为任意特征值. 因此, 离散谱无对称性限制, 特征值可以位于复平面的任意位置, 然而其对应的特征向量必须满足

$$C_{21}(x, t) = C_{12}^T(-x, -t)A_2 \quad (4.4.19)$$

对任意正整数 N , 若 $\zeta_k \in \mathbb{C}_+, \bar{\zeta}_k \in \mathbb{C}_-$, 若设

$$v_{j0} = v_0 = (\vec{a}, 1)^T, \quad \bar{v}_{k0} = \bar{v}_0 = (\vec{b}, 1), \quad \forall j, k \in 1, 2, \dots, N \quad (4.4.20)$$

则其对应的特征向量满足

$$\vec{b} = \rho_{jk} \vec{a}^T A_2, \quad \bar{v}_0 v_0 = 1 + \rho_0 \quad (4.4.21)$$

其中 $\rho_0 = \vec{b} \cdot \vec{a} = \pm 1$ 为常数.

证明 对于逆时空方程情形, 易见 $Q^T(-x, -t) = M_3 Q M_3^{-1}$, 则

$$\begin{aligned} Y_x = -i\zeta \Lambda Y + QY &\implies -Y_x(-x, -t) = -i\zeta \Lambda Y(x, -t) + Q(-x, -t)Y(-x, -t) \\ &\implies -Y_x^T(-x, -t) = -i\zeta Y^T(-x, -t)\Lambda + Y^T(-x, -t)Q^T(-x, -t) \\ &\implies Y_x^T(-x, -t) = i\zeta Y^T(-x, -t)\Lambda - Y^T(-x, -t)M_3 Q(x, -t)M_3^{-1} \\ &\implies Y_x^T(-x, -t)M_3 = Y^T(-x, -t)M_3(i\zeta \Lambda - Q(x, -t)) \\ &\implies \hat{Y}_x(x, t) = \hat{Y}(x, t)(i\hat{\zeta}\Lambda - Q(x, t)), \end{aligned} \quad (4.4.22)$$

其中

$$\hat{Y}(x, t) = Y(-x, -t)^T M_3, \quad \hat{\zeta} = \zeta. \quad (4.4.23)$$

这意味着任意 $\zeta_k \in \mathbb{C}_+$ 可任意取定, 且考虑特征值有

$$M_{jk} = \frac{\rho_{jk} e^{\bar{\theta}_j - \theta_k} + e^{-(\bar{\theta}_j - \theta_k)}}{\bar{\zeta}_j - \zeta_k}, \quad M_{jk}(-x, -t) = \frac{\rho_{jk} e^{-(\bar{\theta}_j - \theta_k)} + e^{\bar{\theta}_j - \theta_k}}{\bar{\zeta}_j - \zeta_k}, \quad (4.4.24)$$

故若 $\rho_{jk} = \vec{b} \vec{a} = \pm 1$, 则有 $M_{jk}(-x, -t) = \rho_{jk} M_{jk}$. 此时若对所有 j, k 取定 $\rho_{jk} = \rho_0 = \pm 1$, 有 $M(-x, -t) = \pm M$, 则有

$$(p(-x, -t), q(-x, -t))^T = -2iC_{12} = -2i\rho_0 \sum_{j,k=1}^N e^{\theta_k + \bar{\theta}_j} (M^{-1})_{jk} \vec{a}_j \quad (4.4.25)$$

利用 Q 的约化关系有

$$(r_1, r_2) = (p(-x, -t), q(-x, -t))A_2 = -2i\rho_0 \sum_{j,k=1}^N e^{\theta_k + \bar{\theta}_j} (M^{-1})_{jk} \vec{a}_j A_2 \quad (4.4.26)$$

若设定

$$v_{j0} = (\vec{a}_j, 1)^T, \quad \bar{v}_{k0} = (\vec{b}_k, 1), \quad \forall j, k \in 1, 2, \dots, N \quad (4.4.27)$$

此时有 $\vec{b} = \rho \vec{a} A_2$. $\square$

和上一章节的三个定理显示: 相比于 2×2 AKNS 系统导出的 NLS 方程, 3×3 没有那么好的性质, 只能使用转置和共轭转置的方式求解, 尤其是逆空间和逆时空情形相比二阶的性质更差, 这是因为二阶矩阵存在 Pauli 矩阵基底, 而三阶矩阵不存在类似的完备基底.

4.4.2 三种约化下解的动力学分析

逆时空作为限制最严格得到的解, 同时也具有最好的性质, 可移动, 可坍缩, 可以展现出大部分局部方程的性质, 因此本小节我们讨论一下它的性质,

4.4.2.1 逆时空

考虑函数

$$\begin{aligned} p(x, t) &= \frac{2i\alpha_1(\zeta_1 - \bar{\zeta}_1)}{e^{-2i\zeta_1 x + 4i\zeta_1^2 t} + 2\alpha_1 \bar{\alpha}_1 e^{-2i\bar{\zeta}_1 x + 4i\bar{\zeta}_1^2 t}} \\ &= 2 \frac{i\alpha_1(\zeta_1 - \bar{\zeta}_1) e^{2i\zeta_1 x - 4i\bar{\zeta}_1^2 t}}{1 + 2\alpha \bar{\alpha}_1 e^{2i(\zeta_1 - \bar{\zeta}_1)x - 4i(\zeta_1^2 - \bar{\zeta}_1^2)t}} \end{aligned} \quad (4.4.28)$$

则可得波速 $V = \frac{\text{Im}(\bar{\zeta}_1^2 - \zeta_1^2)}{\text{Im}(\bar{\zeta}_1 - \zeta_1)}$, 则

$$|p| = 2|\alpha_1| |\zeta_1 - \bar{\zeta}_1| \frac{e^{\omega_1 t}}{1 + 2\alpha_1 \bar{\alpha}_1 e^{i\omega_2 t}} \quad (4.4.29)$$

其中

$$\omega_1 = 2V \text{Im}(\zeta_1) + 4 \text{Im}(\zeta_1^2), \quad (4.4.30)$$

$$\omega_2 = -2V \text{Re}(\bar{\zeta}_1 - \zeta_1) + 4 \text{Re}(\bar{\zeta}_1^2 - \zeta_1^2) \quad (4.4.31)$$

则若 $\text{Re}(\omega_1) \neq 0$, 则解在 $t \rightarrow \pm\infty$ 时爆炸; 若 $\text{Re}(\omega_2) \neq 0$, 则解会周期性的坍塌.

4.4.3 原因

占位

4.5 进一步考虑二重约化情形

本节考虑 p, q 的约化关系, 占位,

第5章 RH方法求解非零边界 NLS 方程

本章节对应范恩贵第六章, 非零背景的求解和第2章有很多部分极为相似, 读者可反复对比阅读.

相比于零边界问题, 非零边界在求解渐进谱问题时除了谱参数 k , 对角化谱参数矩阵还会出现特征值 λ , 通常其为 k 的多值函数, 为了避免在 Riemann 面上讨论反散射的复杂性, Zakharov 和 Shabat 注意到可通过仿射变换 $z = k + \lambda$, 其中 $k = k(z)$, $\lambda = \lambda(z)$ 为 z 的单值函数, 从而在 z 平面上讨论反散射或 RH 问题, 本部分和范恩贵第六章行文思路类似, 但修改符号使其更加易读.

在正式开始之前, 我们简单梳理一下求解非零边界 NLS 方程的大致思路: 如何处理复杂的渐近边界条件, 以及如何消除谱参数的多值性.

大致思路

考虑非零边界的 NLS 方程,

$$iq_t + q_{xx} + 2q|q|^2 = 0, \quad (5.0.1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} q(x, t) = q_{\pm} e^{2iq_0^2 t} \quad (5.0.2)$$

其中 $|q_{\pm}| = q_0 > 0$. 它的 Lax 对为

$$\Phi_x = U\Phi, \quad U = -ik\sigma_3 + Q, \quad (5.0.3)$$

$$\Phi_t = V\Phi, \quad V = -2ik^2\sigma_3 + i\sigma_3(Q_x - Q^2) - 2kQ,$$

其中 $Q = \text{diag}(q, -q^*)$. 我们分三步将该问题转化为标准的 RH 问题:

Step1: 为消除边界条件中关于时间 t 的依赖, 做规范变换 $q = \hat{q}e^{2iq_0^2 t}$, $\Phi = e^{iq_0^2 t \sigma_3} \hat{\Phi}$, 则原方程化为

$$i\hat{q}_t + \hat{q}_{xx} + 2\hat{q}(|\hat{q}|^2 - q_0^2) = 0, \quad (5.0.4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \hat{q}(x, t) = q_{\pm}, \quad (5.0.5)$$

此时边界条件已转化为与 t 无关的常数, 对应的 Lax 对为

$$\hat{\Phi}_x = X\hat{\Phi}, \quad X = U, \quad (5.0.6)$$

$$\hat{\Phi}_t = T\hat{\Phi}, \quad T = V - iq_0^2 \sigma_3. \quad (5.0.7)$$

Step2: 此时虽消去 t , 但空间部分仍存在 x . 故我们取 $x \rightarrow \pm\infty$ 的渐近状态, 此时位势矩阵变为常数矩阵, 得到渐进谱问题

$$\Phi_x = X_{\pm}\Phi, \quad X_{\pm} = ik\sigma_3 + Q_{\pm}, \quad (5.0.8)$$

$$\Phi_t = T_{\pm}\Phi, \quad T_{\pm} = -2kX_{\pm}, \quad Q_{\pm} = \text{diag}(q_{\pm}, -q_{\pm}^*). \quad (5.0.9)$$

为表示方便, 我们仍然记 $\hat{q} = q$, $\hat{\Phi} = \Phi$, 但需要注意变换前后 q, Φ 的含义不同. 求解渐进矩阵 $X_{\pm}$ 的特征值, 会得到 $\pm i\lambda$, 其中 $\lambda = \sqrt{k^2 + q_0^2}$.

Step3: λ 是关于 k 的多值函数, 直接在 k -复平面上讨论解析性极为困难. 因此引入 Riemann 面使其单值化, 利用仿射变换 $z = k + \lambda$ 将 Riemann 面映射到标准的复 z -平面上 (其逆变换即为 Joukowski 变换).

至此, 即可完全套用零边界问题的 RH 求解流程.

5.1 非零边界的 NLS 方程

考虑非零边界的 NLS 方程,

$$iq_t + q_{xx} + 2q|q|^2 = 0, \quad (5.1.1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} q(x, t) = q_{\pm} e^{2iq_0^2 t} \quad (5.1.2)$$

其中 $q_{\pm}$ 与 t 无关且 $|q_{\pm}| = q_0 > 0$. (5.1.1) 的 Lax 对为,

$$\begin{aligned}\Phi_x &= U\Phi, \quad U = -ik\sigma_3 + Q, \\ \Phi_t &= V\Phi, \quad V = -2ik^2\sigma_3 + i\sigma_3(Q_x - Q^2) - 2kQ,\end{aligned}\tag{5.1.3}$$

其中 $Q = \text{diag}(q, -q^*)$.

接下来我们考虑如何将边界条件转化为与 t 无关的形式, 同时为了使得渐进谱问题的时空矩阵出现线性关系, 还需对 Lax 对也做适当调整.

命题 5.1

做变换

$$q \rightarrow \hat{q}e^{2iq_0^2t}, \quad \Phi \rightarrow e^{iq_0^2t\sigma_3}\hat{\Phi},\tag{5.1.4}$$

则 NLS 方程 (5.1.1) 和边界条件化为

$$i\hat{q}_t + \hat{q}_{xx} + 2\hat{q}(|\hat{q}|^2 - q_0^2) = 0,\tag{5.1.5}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \hat{q}(x, t) = q_{\pm},\tag{5.1.6}$$

对应的 Lax 对为

$$\hat{\Phi}_x = X\hat{\Phi}, \quad \hat{\Phi}_t = T\hat{\Phi},\tag{5.1.7}$$

其中

$$X = U = ik\sigma_3 + Q, \quad T = V - iq_0^2\sigma_3.\tag{5.1.8}$$

注 注意到 $X = U, T = V - iq_0^2\sigma_3$, 因此变换前后 Lax 对的空间部分不变, 时间部分仅相差一个常数项, 这提醒我们在求解非零边界问题时可以直接使用变换前的空间部分, 而时间部分则需要进行适当调整.

证明 不妨设变换 $q \rightarrow ue^{2i\alpha t}, \Phi \rightarrow e^{i\beta t\sigma_3}\hat{\Phi}$, 其中 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. 则原 NLS 方程 (5.1.1) 化为

$$\begin{aligned}u_t e^{2i\alpha t} + 2i\alpha u e^{2i\alpha t} + u_{xx} e^{2i\alpha t} + 2u e^{2i\alpha t} |u e^{2i\alpha t}|^2 &= 0, \\ \implies iu_t + u_{xx} + 2u(|u|^2 - \alpha) &= 0.\end{aligned}\tag{5.1.9}$$

Lax 对 (5.1.3) 变为

$$\begin{aligned}\Phi_x &= e^{i\beta t\sigma_3}\hat{\Phi}_x = (ik\sigma_3 + Q)e^{i\beta t\sigma_3}\hat{\Phi}_x \\ \implies \hat{\Phi}_x &= e^{-i\beta t\sigma_3}(ik\sigma_3 + Q)e^{i\beta t\sigma_3}\hat{\Phi} \\ &= e^{i(\alpha-\beta)t\sigma_3} \begin{pmatrix} ik & u \\ -u^* & -ik \end{pmatrix} e^{i(\beta-\alpha)t\sigma_3}\hat{\Phi} = e^{i(\alpha-\beta)t\sigma_3} \begin{pmatrix} ik & u \\ -u^* & -ik \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{5.1.10}$$

其中 $e^{i(\alpha-\beta)t\sigma_3}X = e^{i(\alpha-\beta)t\sigma_3}Xe^{-i(\alpha-\beta)t\sigma_3}$ 同理有

$$\hat{\Phi}_t = e^{i(\alpha-\beta)t\sigma_3} \begin{pmatrix} -2ik^2 + i(|u|^2 - \beta) & iu_x - 2ku \\ iu_x^* + 2ku^* & 2ik^2 - i(|u|^2 - \beta) \end{pmatrix} \hat{\Phi}.\tag{5.1.11}$$

取 $\alpha = \beta$, 则上述 Lax 对简化为

$$\hat{\Phi}_x = \begin{pmatrix} ik & u \\ -u^* & -ik \end{pmatrix} \hat{\Phi} = X\hat{\Phi}\tag{5.1.12}$$

$$\hat{\Phi}_t = \begin{pmatrix} -2ik^2 + i(|u|^2 - \beta) & iu_x - 2ku \\ iu_x^* + 2ku^* & 2ik^2 - i(|u|^2 - \beta) \end{pmatrix} \hat{\Phi} = T\hat{\Phi}\tag{5.1.13}$$

□

对于方程 (5.1.9), 其边界条件为

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, t) = u_{\pm},\tag{5.1.14}$$

其中 $u_{\pm}$ 为与 x, t 无关的常数, 且 $|u_{\pm}| = u_0 > 0$, 因此 $u_{\pm} = u_0 e^{i\theta_{\pm}}$, 即两端渐近状态仅差一个相位. 基于此, 渐近 Lax

对为

$$\tilde{\Phi}_x = \begin{pmatrix} ik & u_{\pm} \\ -u_{\pm}^* & -ik \end{pmatrix} \tilde{\Phi} = X \tilde{\Phi} \quad (5.1.15)$$

$$\tilde{\Phi}_t = \begin{pmatrix} -2ik^2 + i(|u_0|^2 - \beta) & iu_x - 2ku_{\pm} \\ iu_x^* + 2ku_{\pm}^* & 2ik^2 - i(|u_0|^2 - \beta) \end{pmatrix} \tilde{\Phi} = T \tilde{\Phi} \quad (5.1.16)$$

为使得 $\tilde{X}, \tilde{T}$ 具有线性关系, 只能取 $\beta = u_0^2$, 即证.

5.2 Riemann 面和单值化坐标

令 $x \rightarrow \pm\infty$, 并利用边值条件 (5.1.6), 可得

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} Q_x - Q^2 + 2q_0^2 I = 0 \quad (5.2.1)$$

可得到渐进谱问题

$$\Phi_x = X_{\pm} \Phi, \quad \Phi_t = T_{\pm} \Phi, \quad (5.2.2)$$

其中

$$X_{\pm} = ik\sigma_3 + Q_{\pm}, \quad T_{\pm} = -2kX_{\pm}, \quad Q_{\pm} = \text{diag}(q_{\pm}, -q_{\pm}^*). \quad (5.2.3)$$

对 $X_{\pm}$ 求特征值, 可得特征方程

$$\det(\zeta I - X_{\pm}) = (\zeta - ik)(\zeta + ik) + q_0^2 = 0 \implies -\zeta^2 = k^2 + q_0^2 \quad (5.2.4)$$

易见 $X_{\pm}$ 存在两个特征值 $\zeta = \pm i\lambda$, 其中 $\lambda^2 = k^2 + q_0^2$. 这里面临两个问题

1. $k \in \mathbb{C} \implies \lambda$ 为 k 的多值函数,
2. $k \in \mathcal{S} \implies \lambda$ 为 k 的单值函数, 但此时 λ 的定义域为 Riemann 面.

在 Riemann 面上讨论反散射问题较为复杂, 为避免多值性和 Riemann 面的复杂性, 可引入一个仿射参数 z , 使得从参数 k 的复平面转移到 z 的复平面上进行讨论 RH 问题.

为此, 首先考虑方程

$$\lambda^2 = k^2 + q_0^2 = (k + iq_0)(k - iq_0) \quad (5.2.5)$$

决定的 Riemann 面, 其由分割线 $[-iq_0, iq_0]$ 割开的两张 k -平面 $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ 组成, 其中支点为 $k = \pm iq_0$. 在这样的 Riemann 面上, λ 为 k 的单值函数, 由两个单值解析分支组成, 函数值相差一个负号, 因此可以在 $\mathcal{S}_1$ 上引入局部极坐标, 有

$$k + iq_0 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad k - iq_0 = r_2 e^{i\theta_2}, \quad -\pi/2 < \theta_1, \theta_2 < 3\pi/2, \quad (5.2.6)$$

 **笔记** 这里 $q > 0$, 则有 $\text{Re}(k + iq_0) = \text{Re}(k - iq_0) \implies \theta_1 = \theta_2$ 或 $\theta_1 = \theta_2 + \pi$.

则可以写出 Riemann 面上的两个单值解析分支函数

$$\lambda(k) = \begin{cases} \sqrt{r_1 r_2} e^{\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}}, & k \in \mathcal{S}_1, \\ -\sqrt{r_1 r_2} e^{\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}}, & k \in \mathcal{S}_2. \end{cases} \quad (5.2.7)$$

和

$$\text{Im}(\lambda(k)) = \begin{cases} \sqrt{r_1 r_2} \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}, & k \in \mathcal{S}_1, \\ -\sqrt{r_1 r_2} \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}, & k \in \mathcal{S}_2. \end{cases} \quad (5.2.8)$$

定义单值化变量

$$z = k + \lambda, \quad (5.2.9)$$

则由 (5.2.5) 可得

$$\lambda^2 = k^2 + q_0^2 = (z - k)^2 \implies q_0^2 = 2zk + z^2 \implies k(z) = \frac{1}{2}\left(z - \frac{q_0^2}{z}\right). \quad (5.2.10)$$

同理有 $\lambda(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{q_0^2}{z})$, 由 (5.2.6), 可得

$$\operatorname{Im}(k) > 0 \implies 0 < \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} < \pi \implies \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} > 0, \quad (5.2.11)$$

$$\operatorname{Im}(k) < 0 \implies \pi < \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} < 2\pi \implies \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} < 0. \quad (5.2.12)$$

因此, 变换 (5.2.6) 具有如下性质:

1. 将 $\mathcal{S}_1$ 的 $\operatorname{Im}(k) > 0$ 和 $\mathcal{S}_2$ 的 $\operatorname{Im}(k) < 0$ 映射到 z 平面上 $\operatorname{Im}(\lambda) > 0$,
2. 将 $\mathcal{S}_1$ 的 $\operatorname{Im}(k) < 0$ 和 $\mathcal{S}_2$ 的 $\operatorname{Im}(k) > 0$ 映射到 z 平面上 $\operatorname{Im}(\lambda) < 0$.
3. 将 $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ 的分割线 $[-iq_0, iq_0]$ 映为 λ 的割线 $[-q_0, q_0]$.

对 $\lambda(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{q_0^2}{z})$ 利用 Joukowski 变换

定义 5.1 (Joukowski 变换)

设 z 为复平面 $\mathbb{C}$ 上的复变量, Joukowski 变换是一个定义在去掉原点的复平面 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上的解析函数, 其标准形式定义为:

$$w = f(z) = z + \frac{1}{z} \quad (5.2.13)$$

在更一般的流体力学应用中, 常引入一个非零实常数 $c > 0$, 其一般形式定义为:

$$w = f(z) = z + \frac{c^2}{z} \quad (5.2.14)$$

该变换除了在临界点 $z = \pm c$ 处导数为零外, 在定义域内处处是一个共形映射.

$$\lambda(z) = \frac{z^2 + q_0^2}{2z} = \frac{|z|^2 z + q_0^2 z^*}{2|z|^2} = \frac{(|z|^2 - q_0^2)z + q_0^2(z + z^*)}{2|z|^2} = \frac{1}{2|z|^2} [(|z|^2 - q_0^2)z + 2q_0^2 \operatorname{Re}(z)]. \quad (5.2.15)$$

故

$$\operatorname{Im}(\lambda(z)) = \frac{1}{2|z|^2} (|z|^2 - q_0^2) \operatorname{Im}(z). \quad (5.2.16)$$

易见 Joukowski 变换具有如下映射性质

1. 将 $\operatorname{Im}(\lambda) > 0$ 映为 $D^+ = \{z \in \mathbb{C} : (|z|^2 - q_0^2) \operatorname{Im} z > 0\}$;
2. 将 $\operatorname{Im}(\lambda) < 0$ 映为 $D^- = \{z \in \mathbb{C} : (|z|^2 - q_0^2) \operatorname{Im} z < 0\}$;
3. 将割线 $[-q_0, q_0]$ 映为圆 $C_0 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = q_0\}$;

对于 $k \in \mathcal{S}_1$ 有

$$z = k + \sqrt{k^2 + q_0^2} = k + k(1 + \frac{q_0^2}{k^2} + \cdots) = 2k + o(k^{-1}) \rightarrow \infty, \quad k \rightarrow \infty, \quad (5.2.17)$$

对于 $k \in \mathcal{S}_2$ 有

$$z = k - \sqrt{k^2 + q_0^2} = k - k(1 + \frac{q_0^2}{k^2} + \cdots) = -\frac{q_0^2}{2k} + o(k^{-1}) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \quad (5.2.18)$$

因此, 对于 $k \rightarrow \infty$, z 有两种渐进状态:

$$z \in \mathcal{S}_1 : k \rightarrow \infty \implies z \rightarrow \infty, \quad z \in \mathcal{S}_2 : k \rightarrow \infty \implies z \rightarrow 0. \quad (5.2.19)$$

5.3 Jost 函数性质

5.3.1 Jost 函数

矩阵 $X_{\pm}$ 具有两个特征值 $\pm i\lambda$, $T_{\pm}$ 具有两个特征值 $\mp 2ik\lambda$, 且 $X_{\pm}, T_{\pm}$ 可利用同一矩阵对角化使得

$$X_{\pm} = Y_{\pm}(i\lambda\sigma_3)Y_{\pm}^{-1}, \quad T_{\pm} = Y_{\pm}(-2ik\lambda\sigma_3)Y_{\pm}^{-1}, \quad (5.3.1)$$

其中

$$Y_{\pm} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{iq_{\pm}}{z} \\ \frac{iq_{\pm}^*}{z} & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.3.2)$$

证明 这里我们做变形 $X_{\pm}Y_{\pm} = Y_{\pm}(i\lambda\sigma_3)$ 来进行验证

$$\begin{aligned} LSH &= \begin{pmatrix} ik & q_{\pm} \\ -q_{\pm}^* & -ik \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{iq_{\pm}}{z} \\ \frac{iq_{\pm}^*}{z} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ik + \frac{iq_{\pm}q_{\pm}^*}{z} & \frac{i^2kq_{\pm}}{z} + q_{\pm} \\ \frac{-i^2kq_{\pm}^*}{z} - q_{\pm}^* & -ik + \frac{iq_{\pm}q_{\pm}^*}{z} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

(11) 位置由 Joukowsky 变换和 (5.2.10) 得

$$ik + \frac{iq_{\pm}q_{\pm}^*}{z} = i(k + \frac{q_0^2}{z}) = i(k + \frac{q_0^2}{k + \lambda}) = i \frac{k^2 + k\lambda + q_0^2}{k + \lambda} = i \frac{\lambda^2 + k\lambda}{k + \lambda} = i\lambda. \quad (5.3.4)$$

(12) 位置元素由 (5.2.9),

$$\frac{i^2kq_{\pm}}{z} + q_{\pm} = q_{\pm}(1 - \frac{k}{z}) = q_{\pm} \frac{\lambda}{z} \quad (5.3.5)$$

(21), (22) 位置同理.

$$RHS = Y_{\pm}(i\lambda\sigma_3) = \begin{pmatrix} i\lambda & \frac{iq_{\pm}\lambda}{z} \\ \frac{-iq_{\pm}^*\lambda}{z} & -i\lambda \end{pmatrix} \quad (5.3.6)$$

□

注 在处理非零边界的 RH 问题时, 如遇到矩阵等号左右不同, 立即考虑 z, λ, k, q_0 的关系, 以及 Joukowsky 变换.

将 (5.3.1) 带入 (5.2.2)

$$(Y_{\pm}^{-1}\Phi)_x = i\lambda\sigma_3(Y_{\pm}^{-1}\Phi), \quad (Y_{\pm}^{-1}\Phi)_t = -2ik\lambda\sigma_3(Y_{\pm}^{-1}\Phi). \quad (5.3.7)$$

可得渐进谱问题 (5.2.2) 的解

$$\Phi = Y_{\pm}E, \quad \theta(z) = \lambda(z)x - 2k(z)\lambda(z)t. \quad (5.3.8)$$

为表示方便, 我们记 $E = e^{i\theta(z)\sigma}$, $\hat{E} = e^{i\theta(z)\hat{\sigma}_3}$, 因此 Lax 对 (5.1.7) 的 Jost 函数 $\Phi_{\pm}$ 可定义为满足如下边界条件的解

$$\Phi_{\pm} \sim Y_{\pm}E, \quad x \rightarrow \pm\infty. \quad (5.3.9)$$

于是对原始 Lax 对 (5.1.3) 做变换

$$\mu_{\pm} = \Phi_{\pm}E^{-1}, \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad (5.3.10)$$

则

$$\mu_{\pm} \sim Y_{\pm}, \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad (5.3.11)$$

并得到等价 Lax 对

$$(Y_{\pm}^{-1}\mu_{\pm})_x + i\lambda[Y_{\pm}^{-1}\mu_{\pm}, \sigma_3] = Y_{\pm}^{-1}\Delta Q_{\pm}\mu_{\pm}, \quad (5.3.12)$$

$$(Y_{\pm}^{-1}\mu_{\pm})_t - 2ik\lambda[Y_{\pm}^{-1}\mu_{\pm}, \sigma_3] = Y_{\pm}^{-1}\Delta T_{\pm}\mu_{\pm}, \quad (5.3.13)$$

其中 $\Delta Q_{\pm} = Q - Q_{\pm}$, $\Delta T_{\pm} = T - T_{\pm}$.

证明 首先注意到 $X = X_{\pm} + \Delta Q_{\pm}$, 将 (5.3.10) 带入 (5.1.7) 可得

$$\begin{aligned} (\mu_{\pm}E)_x &= X(\mu_{\pm}E) \\ \mu_{\pm,x}E + \mu_{\pm}E(i\lambda\sigma_3) &= (X_{\pm} + \Delta Q_{\pm})\mu_{\pm}E \\ \implies \mu_{\pm,x} + \mu_{\pm}(i\lambda\sigma_3) &= (Y_{\pm}(i\lambda\sigma_3)Y_{\pm}^{-1} + \Delta Q_{\pm})\mu_{\pm} \\ \implies (Y_{\pm}^{-1}\mu_{\pm})_x + i\lambda[Y_{\pm}^{-1}\mu_{\pm}, \sigma_3] &= Y_{\pm}^{-1}\Delta Q_{\pm}\mu_{\pm}. \end{aligned} \quad (5.3.14)$$

□

上面两个式子可写为全微分形式

$$d(\hat{E}^{-1}Y_{\pm}^{-1}\mu_{\pm}) = \hat{E}^{-1}[Y_{\pm}^{-1}(\Delta Q_{\pm} dx + \Delta T_{\pm} dt)\mu_{\pm}]. \quad (5.3.15)$$

对全微分形式 (5.3.15) 沿特殊路径 $(-\infty, t) \rightarrow (x, t)$ 和 $(\infty, t) \rightarrow (x, t)$ 分别积分, 可得 Jost 函数的 Volterra 积分方程

$$\mu_{-}(x, t, z) = Y_{-} + \int_{-\infty}^x Y_{-} e^{i\lambda(x-y)\hat{\sigma}_3} Y_{-}^{-1} \Delta Q_{-}(y, t) \mu_{-}(y, t, z) dy, \quad (5.3.16)$$

$$\mu_{+}(x, t, z) = Y_{+} - \int_x^{\infty} Y_{+} e^{i\lambda(x-y)\hat{\sigma}_3} Y_{+}^{-1} \Delta Q_{+}(y, t) \mu_{+}(y, t, z) dy. \quad (5.3.17)$$

证明 [Volterra 积分的推导] 由 (5.3.15), 两边同时沿 $(-\infty, t) \rightarrow (x, t)$ 路径对 x 积分, 可得

$$\begin{aligned} \hat{E}\mu_{-}|_{-\infty}^x &= \int_{-\infty}^x \hat{E}\Delta Q_{-}\mu_{-} dy, \\ \hat{E}\mu_{-}(x, t, z) - \hat{E}Y_{-} &= \int_{-\infty}^x \hat{E}\Delta Q_{-}\mu_{-} dy, \\ \implies \mu_{-}(x, t, z) &= Y_{-} + \int_{-\infty}^x Y_{-} e^{i\lambda(x-y)\hat{\sigma}_3} Y_{-}^{-1} \Delta Q_{-}(y, t) \mu_{-}(y, t, z) dy. \end{aligned} \quad (5.3.18)$$

μ_{+} 的 Volterra 积分方程同理. □

5.3.2 $\mu_{\pm}$ 的依赖性

由于 $\Phi_{\pm} = \mu_{\pm}E$ 满足 Lax 对 (5.1.7), 且其解线性相关, 因此存在与 x, t 无关的矩阵 $S(z)$ 使得

$$\Phi_{+} = \Phi_{-}S(z) \implies \mu_{+}E = \mu_{-}ES(z) \implies \mu_{+} = \mu_{-}ES(z)E^{-1}. \quad (5.3.19)$$

即

$$\mu_{+}(x, t, z) = \mu_{-}(x, t, z)\hat{E}S(z). \quad (5.3.20)$$

其中 $S(z) = (s_{ij}(z))$ 与 x, t 无关, 称为散射矩阵.

5.3.3 $\mu_{\pm}$ 和 $S(z)$ 的解析性

定理 5.1

对于 $q(x) - q_{\pm} \in L^1(\mathbb{R})$, 由 (5.3.16) 和 (5.3.17) 定义的特征函数 $\mu_{\pm}$ 存在且唯一. ♡

证明 仅证明 $\mu_{-,1}$, 对 Volterra 积分 (5.3.16) 左右两边同时乘以 Y_{-}^{-1} 可得

$$\begin{aligned} Y_{-}^{-1}\mu_{-}(x, t, z) &= I + \int_{-\infty}^x e^{i\lambda(x-y)} (Y_{-}^{-1}\Delta Q_{-}(y, t)Y_{-})(Y_{-}^{-1}\mu_{-}(y, t, z))e^{-i\lambda(x-y)} dy. \\ &= I + \int_{-\infty}^x e^{i\lambda(x-y)} (Y_{-}^{-1}\Delta X_{-}(y, t)Y_{-})(Y_{-}^{-1}\mu_{-}(y, t, z))e^{-i\lambda(x-y)} dy. \end{aligned} \quad (5.3.21)$$

不妨记 $\mu_{\pm} = (\mu_{\pm,1}, \mu_{\pm,2})$, 令 $w(x, t, z) = Y_{-}^{-1}\mu_{-,1}$, 可将 (5.3.21) 中 $\mu_{-,1}$ 的积分方程写为

$$w(x, t, z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_{-\infty}^x Fw(y, t, z) dy. \quad (5.3.22)$$

其中

$$F = F(x - y, z) = \text{diag}(1, e^{-2i\lambda(x-y)})Y_{-}^{-1}\Delta X_{-}(y, t)Y_{-}. \quad (5.3.23)$$

记 $D_{\epsilon} = D_{-} \setminus (B_{\epsilon}(iq_0) \cup B_{\epsilon}(-iq_0))$, 其中 $B_{\epsilon}(\pm iq_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z \mp iq_0| < \epsilon\}$, 且 $0 < \epsilon < 1$. 定义递推序列

$$w^0 = (1, 0)^T, \quad (5.3.24)$$

$$w^{(n+1)} = \int_{-\infty}^x Fw^{(n)}(y, t, z) dy, \quad n = 0, 1, 2, \dots. \quad (5.3.25)$$

由此构建 Neumann 级数

$$w(x, t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} w^{(n)}(x, t, z). \quad (5.3.26)$$

接下来只需证明 $w(x, t, z)$ 为方程 (5.3.16) 在 D_-^ϵ 上的解. 仅需证明级数收敛且唯一即可.

Step 1. $w(x, t, z)$ 的存在性

定义向量的 L^1 范数为 $\|w\| = |w_1| + |w_2|$, 则

$$\|w^{(n+1)}\| \leq \int_{-\infty}^x \|F\| \|w^{(n)}\| dy, \quad (5.3.27)$$

直接计算可得如下估计

$$\|F\| = \|\text{diag}(1, e^{-2i\lambda(x-y)})\| \cdot \|Y_-^{-1}\| \cdot \|\Delta X_-(y, t)\| \cdot \|Y_-\|, \quad (5.3.28)$$

$$c_\epsilon = \max_{z \in D_-^\epsilon} \|Y_-^{-1}\| \cdot \|Y_-\| = \max_{z \in D_-^\epsilon} \frac{4(1+q/|z|)^2}{1+q_0^2/z^2} < 4(1+\epsilon^2)/\epsilon, \quad (5.3.29)$$

$$\|\text{diag}(1, e^{-2i\lambda(x-y)})\| \leq 1 + e^{2\text{Im}\lambda(x-y)} \leq 2, \quad (5.3.30)$$

$$\|\Delta X_-\| \leq 2|q(x) - q_-| \quad (5.3.31)$$

将上述估计代入 (5.3.27), 可得

$$\|w^{(n+1)}(x, t, z)\| \leq 4c_\epsilon \int_{-\infty}^x |q - q_-| \cdot \|w^{(n)}(y, t, z)\| dy. \quad (5.3.32)$$

不妨记

$$\rho(x, t) = 4c_\epsilon \int_{-\infty}^x |q - q_-| dy, \quad (5.3.33)$$

则易得当 $q(x) - q_- \in L^1(\mathbb{R})$ 时, 对于任意固定 $x, \rho(x, t) < \infty$, 积分存在, 且

$$\rho_x(x, t) = 4c_\epsilon |q - q_-|, \quad w^1 = \rho(x, t), \quad (5.3.34)$$

由数学归纳法, 假设 $\|w^{(n)}\| \leq \frac{\rho^n}{n!}$, 则由 (5.3.32) 可得

$$\begin{aligned} \|w^{(n+1)}\| &\leq 4c_\epsilon \int_{-\infty}^x |q - q_-| \frac{\rho^n(y, t)}{n!} dy \\ &= \int_{-\infty}^x \rho_x(y, t) \frac{\rho^n(y, t)}{n!} dy = \frac{\rho^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned} \quad (5.3.35)$$

由此可得 (5.3.16) 的级数解积分收敛且有界, 另外由于 $w^{(0)}, F$ 对于 z 的解析性, 递推可得 $w^{(n)}, n \geq 1$ 时解析.

由于 $q(x) - q_- \in L^1(\mathbb{R}_-)$, 则对 $x \leq a \in \mathbb{R}$ 及 $z \in D_-^\epsilon$, 有

$$\rho(x, t) \leq 4c_\epsilon \int_{-\infty}^a |q - q_-| dy = \sigma < \infty, \quad (5.3.36)$$

其中 σ 为与 x 无关的常数, 故

$$\|w^{(n)}\| \leq \frac{\sigma^n}{n!}, \quad (5.3.37)$$

故 (5.3.26) 定义的 Neumann 级数在 $x \in (-\infty, a)$ 上绝对一致收敛, 且在 $z \in D_-^\epsilon$ 内解析. 利用 (5.3.25)-(5.3.26), 有

$$\begin{aligned} w(x, t, z) &= w^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} w^{(n)} \\ &= w^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^x F w^{(n)}(y, t, z) dy = w^{(0)} + \int_{-\infty}^x F \sum_{n=0}^{+\infty} w^{(n)}(y, t, z) dy \\ &= w^{(0)} + \int_{-\infty}^x F w(y, t, z) dy, \end{aligned} \quad (5.3.38)$$

故 (5.3.26) 定义的 $w(x, t, z)$ 是方程 (5.3.16) 的解.

Step 2. $w(x, t, z)$ 的唯一性:

为证明唯一性, 不妨设 $\tilde{w}(x, t, z)$ 也是方程 (5.3.16) 的解, 令 $h = \tilde{w}(x, t, z) - w(x, t, z)$, 则

$$\|h(x, t, z)\| \leq \int_{-\infty}^x \|F\| \cdot \|h(y, t, z)\| dy. \quad (5.3.39)$$

利用 (5.3.28)-(5.3.31) 估计得

$$\|h(x, t, z)\| \leq 4c_\epsilon \int_{-\infty}^x |q - q_-| \cdot \|h(y, t, z)\| dy = \int_{-\infty}^x \rho_x(y, t) \|h(y, t, z)\| dy. \quad (5.3.40)$$

由 Gronwall 不等式可得 $h(x, t, z) = 0$, 从而证明了 $w(x, t, z)$ 的唯一性. $\square$

由 (5.3.23) 可得 $\mu_{-,1}$ 在 D_- 上解析. 同理有 $\mu_{+,2}$ 在 D_- 上解析, $\mu_{-,2}$ 和 $\mu_{+,1}$ 在 D_+ 上解析. 即

$$\mu_+ = \begin{pmatrix} \mu_+^{(11)} & \mu_+^{(12)} \\ \mu_+^{(21)} & \mu_+^{(22)} \end{pmatrix} = (\mu_{+,1}, \mu_{+,2}), \quad \mu_- = \begin{pmatrix} \mu_-^{(11)} & \mu_-^{(12)} \\ \mu_-^{(21)} & \mu_-^{(22)} \end{pmatrix} = (\mu_{-,1}, \mu_{-,2}). \quad (5.3.41)$$

由 Lax 对 (5.1.7) 可得 $\text{tr}(X) = \text{tr}(T) = 0$, 由 Abel 定理可得

$$\det(\Phi_\pm)_x = \det(\Phi_\pm)_t = 0 \implies \det(\Phi_\pm) = C, \quad (5.3.42)$$

而由变换 (5.3.10) 可得

$$\det(\mu_\pm) = \det(\Phi_\pm E) = \det(\Phi_\pm). \quad (5.3.43)$$

故 $\det(\mu_\pm) = c$ 与 x, t 无关, 再利用 (5.3.11) 有

$$\det(\mu_\pm) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \det(\mu_\pm) = \det(Y_\pm) = 1 + \frac{q_0^2}{z^2} = \gamma \neq 0 \quad (5.3.44)$$

故 $\mu_\pm$ 可逆, 计算可得

$$\mu_+^{-1} = \frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} \mu_+^{(22)} & -\mu_+^{(12)} \\ -\mu_+^{(21)} & \mu_+^{(11)} \end{pmatrix} = (\hat{\mu}_+^-, \hat{\mu}_+^+)^T, \quad (5.3.45)$$

$$\mu_-^{-1} = \frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} \mu_-^{(22)} & -\mu_-^{(12)} \\ -\mu_-^{(21)} & \mu_-^{(11)} \end{pmatrix} = (\hat{\mu}_-^+, \hat{\mu}_-^-)^T. \quad (5.3.46)$$

由 (5.3.20), (5.3.44) 可得 $\det S = 1$, 且

$$\begin{aligned} \hat{E}S(z) &= \hat{E} \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \\ &= \mu_-^{-1} \mu_+ = \begin{pmatrix} \hat{\mu}_-^+ \\ \hat{\mu}_-^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_{+,1} & \mu_{+,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mu}_-^+ \mu_{+,1} & \hat{\mu}_-^+ \mu_{+,2} \\ \hat{\mu}_-^- \mu_{+,1} & \hat{\mu}_-^- \mu_{+,2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.3.47)$$

由此可见, $s_{11}(z)$ 在 D^+ 上解析, $s_{22}(z)$ 在 D^- 上解析, $s_{12}(z), s_{21}(z)$ 连续到边界 Σ .

注 这里也可以用另一种方法证明 $S(z)$ 的解析性, 将 (5.3.20) 展开得

$$\mu_{+,1}(z) = s_{11}(z)\mu_{-,1}(z) + s_{21}(z)e^{-2i\theta(z)}\mu_{-,2}(z), \quad (5.3.48)$$

$$\mu_{+,2}(z) = s_{12}(z)e^{2i\theta(z)}\mu_{-,1}(z) + s_{22}(z)\mu_{-,2}(z), \quad (5.3.49)$$

则

$$s_{11}(z) = \frac{1}{\gamma} \det(\mu_{+,1}, \mu_{-,2}), \quad s_{21}(z) = \frac{1}{\gamma} e^{2i\theta(z)} \det(\mu_{-,1}, \mu_{+,1}), \quad (5.3.50)$$

$$s_{12}(z) = \frac{1}{\gamma} e^{-2i\theta(z)} \det(\mu_{+,2}, \mu_{-,2}), \quad s_{22}(z) = \frac{1}{\gamma} \det(\mu_{-,1}, \mu_{+,2}). \quad (5.3.51)$$

由 $\mu_\pm$ 各列的解析性可知, s_{11} 在 D^+ 上解析, s_{22} 在 D^- 上解析, s_{12}, s_{21} 连续到边界.

5.3.4 $\mu_{\pm}$ 和 $S(z)$ 的对称性

定理 5.2

$\mu_{\pm}$ 和 $S(z)$ 具有如下对称性

$$\mu_{\pm}(x, t, z) = -\sigma \mu_{\pm}^*(x, t, z^*) \sigma \quad (5.3.52)$$

$$\mu_{\pm}(x, t, z) = \frac{i}{z} \mu_{\pm}(x, t, -\frac{q_0}{z}) \sigma_3 Q_{\pm} \quad (5.3.53)$$

$$S^*(z^*) = -\sigma S(z) \sigma \quad (5.3.54)$$

$$S(z) = (\sigma_3 Q_-)^{-1} S(-\frac{q_0^2}{z}) (\sigma_3 Q_+) \quad (5.3.55)$$

其中 $\sigma = i\sigma_2, \sigma_3$ 为 Pauli 矩阵.

注 这里使用 σ 而非 σ_2 是因为实矩阵无需考虑共轭以及直觉性更强. 若使用 σ_2 则失去了这样的简洁性.

上述对称性按照矩阵列展开为

$$\mu_{\pm,1}(x, t, z) = \sigma \mu_{\pm,2}^*(x, t, z^*) \quad (5.3.56)$$

$$\mu_{\pm,2}(x, t, z) = -\sigma \mu_{\pm,1}^*(x, t, z^*) \quad (5.3.57)$$

$$\mu_{\pm,1}(x, t, z) = \frac{iq^*}{z} \mu_{\pm,2}(x, t, -\frac{q_0}{z}) \quad (5.3.58)$$

$$\mu_{\pm,2}(x, t, z) = -\frac{iq}{z} \mu_{\pm,1}(x, t, -\frac{q_0}{z}) \quad (5.3.59)$$

$$s_{11}(z) = s_{22}^*(z^*), \quad s_{12}(z) = -s_{21}^*(z^*), \quad (5.3.60)$$

$$s_{11}(z) = \frac{q_+}{q_-} s_{22}(-\frac{q_0^2}{z}), \quad s_{12}(z) = \frac{q_+}{q_-} s_{21}(-\frac{q_0^2}{z}). \quad (5.3.61)$$

证明 由

$$[Y_{\pm}^{-1} \mu_{\pm}(z)]_x + i\lambda [Y_{\pm}^{-1}(z) \mu_{\pm}(z), \sigma_3] = Y_{\pm}^{-1}(z) \Delta Q_{\pm}(z) \mu_{\pm}(z) \quad (5.3.62)$$

将 $z \rightarrow z^*$, 再对方程两边同时共轭得

$$[Y_{\pm}^{-1}(z) \mu_{\pm}(z^*)]_x^* - i\lambda^*(z^*) [Y_{\pm}^{-1} \mu_{\pm}^*(z^*), \sigma_3] = Y_{\pm}^{-1*}(z^*) \Delta Q_{\pm}^*(z^*) \mu_{\pm}^*(z^*) \quad (5.3.63)$$

对两边同时乘以 σ 得

$$\sigma [Y_{\pm}^{-1}(z) \mu_{\pm}(z^*)]_x^* \sigma - i\lambda^*(z^*) \sigma [Y_{\pm}^{-1} \mu_{\pm}^*(z^*), \sigma_3] \sigma = \sigma Y_{\pm}^{-1*}(z^*) \Delta Q_{\pm}^*(z^*) \mu_{\pm}^*(z^*) \sigma \quad (5.3.64)$$

由 $Y_{\pm}, \Delta Q_{\pm}, \lambda$ 定义, 注意到

$$\sigma Y_{\pm}^{-1*}(z^*) \sigma = -Y_{\pm}^{-1}(z), \quad \lambda^*(z^*) = \lambda(z), \quad \sigma \Delta Q_{\pm}^*(z^*) \sigma = -\Delta Q_{\pm}(z). \quad (5.3.65)$$

则有

$$[Y_{\pm}^{-1}(z) \sigma \mu_{\pm}^*(z^*) \sigma]_x + i\lambda(z) [Y_{\pm}^{-1}(z) \sigma \mu_{\pm}^*(z^*) \sigma, \sigma_3] = Y_{\pm}^{-1}(z) \Delta Q_{\pm}(z) \sigma \mu_{\pm}^*(z^*) \sigma \quad (5.3.66)$$

由 (5.3.62), (5.3.66) 可得 $\mu_{\pm}(x, t, z)$ 和 $-\sigma \mu_{\pm}^*(x, t, z^*) \sigma$ 都满足同一线性齐次微分方程族, 且具有相同的渐近性

$$\mu_{\pm}(x, t, z) \sim Y_{\pm}, \quad -\sigma \mu_{\pm}^*(x, t, z^*) \sigma \sim -\sigma Y_{\pm}^* \sigma = Y_{\pm}, \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad (5.3.67)$$

故二者相等, 即

$$\mu_{\pm}(x, t, z) = -\sigma \mu_{\pm}^*(x, t, z^*) \sigma. \quad (5.3.68)$$

接下来考虑 $S(z)$ 的对称性, 将 (5.3.19) 改写为

$$S(z) = \hat{E}^{-1} \mu_{-}^{-1}(x, t, z) \mu_{+}(x, t, z), \quad (5.3.69)$$

注意到 $\theta^*(z^*) = \theta(z)$, $\sigma E^*(z^*)\sigma = -E$, 并利用 (5.3.67) 可得

$$\begin{aligned} -\sigma S^*(z^*)\sigma &= \sigma \left(E^{-1}(z^*)\mu_-^{-1}(z^*E(z^*))\mu_+(z^*) \right)^* \sigma \\ &= \left(-\sigma(E^{-1}(z^*))^* \sigma \right) \left(\sigma \mu_-^{-1}(z^*)\sigma \right) \left(-\sigma \mu_+^*(z^*)\sigma \right) \left(-\sigma E^*(z^*)\sigma \right) \\ &= E^{-1}\mu_-^{-1}\mu_+E = \hat{E}^{-1}\mu_-^{-1}\mu_+ = S(z) \end{aligned} \quad (5.3.70)$$

□

5.3.5 $\mu_{\pm}$ 和 $S(z)$ 的渐近性

由 Lax 对 (5.1.3) 及渐近替换 $\Phi = \mu E$ 出发, 易见

$$\mu_{\pm} = I + \frac{i}{z}\sigma_3 Q + O(z^{-2}), \quad z \rightarrow \infty. \quad (5.3.71)$$

$$\mu_{\pm} = \frac{i}{z}\sigma_3 Q_{\pm} + O(1), \quad z \rightarrow 0. \quad (5.3.72)$$

更进一步可得

$$S(z) = I + O(z^{-1}), \quad z \rightarrow \infty, \quad S(z) = \text{diag}\left(\frac{q_-}{q_+}, \frac{q_+}{q_-}\right) + O(z), \quad z \rightarrow 0. \quad (5.3.73)$$

证明 [这里书上证明过于繁琐, 我给出一个更简洁地证明] 仅证明 $z \rightarrow \infty$ 时的渐近行为, 考虑空间部分的 Lax 方程. 将 $\Phi = \mu_{\pm}E$ 代入 $\Phi_x = (ik\sigma_3 + Q)\Phi$, 两边右乘 E^{-1}

$$\mu_{\pm,x} - ik\sigma_3\mu_{\pm} + i\lambda\mu_{\pm}\sigma_3 = Q\mu_{\pm}. \quad (5.3.74)$$

由单值化参数定义 $z = k + \lambda$ 及 $\lambda^2 = k^2 + q_0^2$ 可知, 当 $z \rightarrow \infty$ 时:

$$\lambda = \frac{z}{2} + \frac{q_0^2}{2z}, \quad k = \frac{z}{2} - \frac{q_0^2}{2z}. \quad (5.3.75)$$

$\mu_{\pm}$ 在 $z \rightarrow \infty$ 处的渐近展开为:

$$\mu_{\pm} = \mu_0^{\pm} + \frac{\mu_1^{\pm}}{z} + O(z^{-2}). \quad (5.3.76)$$

将展开式代入方程 (5.3.74) 中, 并按 z 的幂次收集各项:

$$\left(\mu_{0,x}^{\pm} + \frac{\mu_{1,x}^{\pm}}{z} \right) - i \left(\frac{z}{2} - \frac{q_0^2}{2z} \right) \sigma_3 \left(\mu_0^{\pm} + \frac{\mu_1^{\pm}}{z} \right) + i \left(\frac{z}{2} + \frac{q_0^2}{2z} \right) \left(\mu_0^{\pm} + \frac{\mu_1^{\pm}}{z} \right) \sigma_3 = Q \left(\mu_0^{\pm} + \frac{\mu_1^{\pm}}{z} \right). \quad (5.3.77)$$

比较等式两端 z 的各次幂系数:

$$z^1: \quad \frac{i}{2}[\mu_0^{\pm}, \sigma_3] = 0, \quad (5.3.78)$$

$$z^0: \quad \mu_{0,x}^{\pm} + \frac{i}{2}[\mu_1^{\pm}, \sigma_3] = Q\mu_0^{\pm}. \quad (5.3.79)$$

由 (5.3.78) 可知, $\mu_0^{\pm}$ 为对角矩阵, 故其 $\mu_{0,x}^{\pm}$ 也是对角阵. 又由于 $[\mu_1^{\pm}, \sigma_3]$ 的对角线元素为 0, 同时位势矩阵 Q 纯为非对角阵, 故 $Q\mu_0^{\pm}$ 也只有非对角元素. 分离 (5.3.79) 的对角部分与非对角部分

$$\mu_{0,x}^{\pm} = 0, \quad \frac{i}{2}[\mu_1^{\pm}, \sigma_3] = Q\mu_0^{\pm}. \quad (5.3.80)$$

又 $\mu_{\pm} \rightarrow I(x \rightarrow \pm\infty)$, 且 $\mu_{0,x}^{\pm} = 0$, 故在全空间恒有 $\mu_0^{\pm} = I$, 代入 (5.3.80), 得:

$$\frac{i}{2}[\mu_1^{\pm}, \sigma_3] = Q. \quad (5.3.81)$$

易知微扰项 $\mu_1^{\pm}$ 对角元素为 0, 又 $\sigma_3\mu_1^{\pm} = -\mu_1^{\pm}\sigma_3$, 故 $[\mu_1^{\pm}, \sigma_3] = 2\mu_1^{\pm}\sigma_3$. 代入上式解得:

$$i\mu_1^{\pm}\sigma_3 = Q \implies \mu_1^{\pm} = -iQ\sigma_3 = i\sigma_3Q. \quad (5.3.82)$$

至此 (5.3.71) 证明完毕. 进一步比较矩阵 12 位置, 即可得到重构公式:

$$q(x, t) = -i(\mu_1^{\pm})_{12} = -i \lim_{z \rightarrow \infty} z(\mu_{\pm})_{12}. \quad (5.3.83)$$

□

5.4 相关广义 RH 问题

由 (5.3.48) 和 (5.3.49) 可定义分片解析矩阵

$$M^+ = \left(\frac{\mu_{+,1}}{s_{11}}, \mu_{-,2} \right), \quad M^- = (\mu_{-,1}, \frac{\mu_{+,2}}{s_{22}}). \quad (5.4.1)$$

易见 $M^\pm$ 分别在 $D^\pm$ 上解析, 利用 Jost 函数和散射系数的渐进性, 容易证明

$$M^\pm = I + O(z^{-1}), \quad z \rightarrow \infty, \quad M^\pm = \frac{1}{z} \sigma_3 Q_\pm + O(1), \quad z \rightarrow 0. \quad (5.4.2)$$

由此我们可得到下面广义 RH 问题

定理 5.3

$M^\pm(x, t, z)$ 在 $\mathbb{C} \setminus \Sigma$ 上亚纯, 在零点集 $\{z : s_{11}(z) = s_{22}(z) = 0\}$ 上满足留数条件, 且满足如下跳跃条件

$$M^-(x, t, z) = M^+(x, t, z)(I - G(x, t, z)), \quad z \in \Sigma \quad (5.4.3)$$

$$M^\pm = I + O(z^{-1}), \quad z \rightarrow \infty \quad (5.4.4)$$

$$M^\pm = \frac{i}{z} \sigma_3 Q_\pm + O(1), \quad z \rightarrow 0 \quad (5.4.5)$$

其中跳跃矩阵为

$$G(x, t, z) = \hat{E} \begin{pmatrix} 0 & -\tilde{\rho}(z) \\ \rho(z) & \rho(z)\tilde{\rho}(z) \end{pmatrix}, \quad (5.4.6)$$

这里反射系数为 $\rho(z) = s_{21}/s_{11}$, $\tilde{\rho}(z) = s_{12}/s_{22}$, 则 NLS 方程解可表示为

$$q(x, t) = -i \lim_{z \rightarrow \infty} (zM_+)_1. \quad (5.4.7)$$

证明 [跳跃矩阵 $G(x, t, z)$ 的推导] 由分片解析矩阵 $M^\pm$ 的定义可知, 它们的列向量分别为:

$$M_1^+ = \frac{\mu_{+,1}}{s_{11}}, \quad M_2^+ = \mu_{-,2}, \quad M_1^- = \mu_{-,1}, \quad M_2^- = \frac{\mu_{+,2}}{s_{22}}. \quad (5.4.8)$$

则有

$$M_1^+ = M_1^- + \rho e^{-2i\theta} M_2^+, \quad M_2^- = \tilde{\rho} e^{2i\theta} M_1^- + M_2^+ \quad (5.4.9)$$

将散射关系 (5.3.48)-(5.3.49) 两边分别同除 s_{11}, s_{22} , 并利用反射系数的定义得:

$$\frac{\mu_{+,1}}{s_{11}} = \mu_{-,1} + \frac{s_{21}}{s_{11}} e^{-2i\theta} \mu_{-,2} \implies M_1^+ = M_1^- + \rho e^{-2i\theta} M_2^+. \quad (5.4.10)$$

$$\frac{\mu_{+,2}}{s_{22}} = \frac{s_{12}}{s_{22}} e^{2i\theta} \mu_{-,1} + \mu_{-,2} \implies M_2^- = \tilde{\rho} e^{2i\theta} M_1^- + M_2^+. \quad (5.4.11)$$

将 (5.4.9) 代入 (5.4.11) 中, 以消去 M_1^- :

$$\begin{aligned} M_2^- &= \tilde{\rho} e^{2i\theta} (M_1^+ - \rho e^{-2i\theta} M_2^+) + M_2^+ = \tilde{\rho} e^{2i\theta} M_1^+ - \rho \tilde{\rho} M_2^+ + M_2^+ \\ &= \tilde{\rho} e^{2i\theta} M_1^+ + (1 - \rho \tilde{\rho}) M_2^+. \end{aligned} \quad (5.4.12)$$

联立 (5.4.9) 和 (5.4.12):

$$M^- = (M_1^-, M_2^-) = (M_1^+, M_2^+) \begin{pmatrix} 1 & \tilde{\rho} e^{2i\theta} \\ -\rho e^{-2i\theta} & 1 - \rho \tilde{\rho} \end{pmatrix}. \quad (5.4.13)$$

则

$$G(x, t, z) = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\tilde{\rho}(z) \\ \rho(z) & \rho(z)\tilde{\rho}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} = \hat{E} \begin{pmatrix} 0 & -\tilde{\rho}(z) \\ \rho(z) & \rho(z)\tilde{\rho}(z) \end{pmatrix}. \quad (5.4.14)$$

□

5.5 离散谱和留数条件

假设 $z_n, (n = 1, 2, \dots, N)$ 是 $s_{11}(z)$ 在 D^+ 上的零点, 则由对称性 (5.3.60)-(5.3.61) 可得

$$s_{11}(z_n) = 0 \iff s_{22}(z_n^*) = 0 \iff s_{22}\left(-\frac{q_0^2}{z_n}\right) = 0 \iff s_{11}\left(-\frac{q_0^2}{z_n^*}\right) = 0 \quad (5.5.1)$$

因此我们有四个离散谱 $z_n, -q_0^2/z_n^*, z_n^*, -q_0^2/z_n, (n = 1, \dots, N)$. 我们对这 $4N$ 个离散谱重新编号, 记

$$\xi_n = z_n, \quad \xi_{n+N} = -q_0^2/z_n^*, \quad (5.5.2)$$

则离散谱集合为 $Z = \{\xi_n, \bar{\xi}_n : n = 1, 2, \dots, 2N\}$, k -复平面和 z -复平面上的离散谱点分布和对应情况见图 6.2(暂时无图, 请看范 ch6 fig 6-2)

接下来我们考虑留数关系. 首先, 对 $z = \xi_n$, 由 $s_{11}(\xi_n) = 0$, 以及散射关系 (5.3.50) 推知 $\mu_{+,1}(\xi_n)$ 与 $\mu_{-,2}(\xi_n)$ 线性相关, 提取出震荡因子后记为:

$$\mu_{+,1}(\xi_n) = b_n e^{-2i\theta(\xi_n)} \mu_{-,2}(\xi_n), \quad n = 1, 2, \dots, 2N, \quad (5.5.3)$$

其中 b_n 为与 x, t 无关的常数. 由此可计算 $\mu_{+,1}/s_{11}$ 在此简单极点处的留数:

$$\operatorname{Res}_{z=\xi_n} \frac{\mu_{+,1}(z)}{s_{11}(z)} = \frac{\mu_{+,1}(\xi_n)}{s'_{11}(\xi_n)} = C_n e^{-2i\theta(\xi_n)} \mu_{-,2}(\xi_n), \quad C_n = \frac{b_n}{s'_{11}(\xi_n)}. \quad (5.5.4)$$

同理, 对 $z = \xi_n^*$, 由 $s_{22}(\xi_n^*) = 0$, 以及散射关系 (5.3.51) 可得:

$$\mu_{+,2}(\xi_n^*) = d_n e^{2i\theta(\xi_n^*)} \mu_{-,1}(\xi_n^*), \quad n = 1, 2, \dots, 2N, \quad (5.5.5)$$

其中 d_n 为与 x, t 无关但 b_n 有关的常数. 对上式两边同时取复共轭, 并在左乘 σ 可得:

$$\sigma \mu_{+,2}^*(\xi_n^*) = d_n^* e^{-2i\theta^*(\xi_n^*)} \sigma \mu_{-,1}^*(\xi_n^*). \quad (5.5.6)$$

利用对称性 (5.3.56) 和 (5.3.57), 且注意到 $\theta^*(z^*) = \theta(z)$, 上式可化为:

$$\mu_{+,1}(\xi_n) = -d_n^* e^{-2i\theta(\xi_n)} \mu_{-,2}(\xi_n). \quad (5.5.7)$$

将其与 (5.5.3) 比较, 可得: $d_n^* = -b_n$. 由此计算 $\mu_{+,2}/s_{22}$ 在 ξ_n^* 处的留数:

$$\operatorname{Res}_{z=\xi_n^*} \frac{\mu_{+,2}(z)}{s_{22}(z)} = \frac{\mu_{+,2}(\xi_n^*)}{s'_{22}(\xi_n^*)} = D_n e^{2i\theta(\xi_n^*)} \mu_{-,1}(\xi_n^*), \quad D_n = \frac{d_n}{s'_{22}(\xi_n^*)}. \quad (5.5.8)$$

利用散射系数的对称性 (5.3.60) 有

$$D_n^* = \left(\frac{d_n}{s'_{22}(\xi_n^*)} \right)^* = \frac{d_n^*}{(s'_{22}(\xi_n^*))^*} = \frac{-b_n}{s'_{11}(\xi_n)} = -C_n \implies D_n = -C_n^*. \quad (5.5.9)$$

联立 (5.5.4) 和 (5.5.8) 及 $D_n = -C_n^*$, 可得分片解析矩阵 $M^\pm$ 的留数条件:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=\xi_n} M^+ &= \begin{pmatrix} C_n e^{-2i\theta(\xi_n)} \mu_{-,2}(\xi_n) & 0 \end{pmatrix} \\ \operatorname{Res}_{z=\xi_n^*} M^- &= \begin{pmatrix} 0 & -C_n^* e^{2i\theta(\xi_n^*)} \mu_{-,1}(\xi_n^*) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.5.10)$$

5.6 RH 问题的可解性

5.6.1 重构公式

为利用 Plemelj 公式求解 RH 问题, 我们需要去除 M 的奇性, 将原来的 RH 问题转化为规范 RH 问题, 将 (5.4.3) 改写为

$$\begin{aligned} M^- - I - \frac{i}{z} \sigma_3 Q_- - \sum_{n=1}^{2N} \frac{\operatorname{Res}_{z=\xi_n^*} M^-}{z - \xi_n^*} - \sum_{n=1}^{2N} \frac{\operatorname{Res}_{z=\xi_n} M^+}{z - \xi_n} \\ = M^+ - I - \frac{i}{z} \sigma_3 Q_- - \sum_{n=1}^{2N} \frac{\operatorname{Res}_{z=\xi_n^*} M^-}{z - \xi_n^*} - \sum_{n=1}^{2N} \frac{\operatorname{Res}_{z=\xi_n} M^+}{z - \xi_n} - M^+ G. \end{aligned} \quad (5.6.1)$$

上述方程左边前四项在 D^- 上解析, 且第五项极点为 $z = \xi \in D^+$, 因此在 D^- 上解析. 于是 (5.6.1) 左边在 D^- 上解析且渐近于 $O(1/z)$, ($z \rightarrow \infty$). 同理 (5.6.1) 右边前五项 D^+ 上解析, 且 $O(1/z)$, ($z \rightarrow \infty$). 于是由 Plemelj 公式可得

$$M(x, t, z) = I + \frac{i}{z} \sigma_3 Q_- + \sum_{n=1}^{2N} \frac{\text{Res}_{z=\xi_n^*} M^-}{z - \xi_n^*} + \sum_{n=1}^{2N} \frac{\text{Res}_{z=\xi_n} M^+}{z - \xi_n} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{M(s)G(x, t, s)}{s - z} ds, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma \quad (5.6.2)$$

注 这里是因为若记 (5.6.1) 的左边为 F^- , 右边为 $F^+ - M^+G$, 则

$$F^+(z) - F^-(z) = M^+G, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} F^{\pm} = 0 \quad (5.6.3)$$

满足标准 Plemelj 公式.

分别在 D^+ 和 D^- 上考虑 (5.6.2) 的第二, 第一列:

函数在点 $z = \xi_n \in D^+$ 上, 考虑 M^+ 的 12 位置元素, 有

$$\mu_{-,2} = \begin{pmatrix} \frac{iq_-}{\xi_n} \\ 1 \end{pmatrix} - \sum_{k=1}^{2N} \frac{C_k^* e^{i\theta(\xi_k^*)} \mu_{-,1}(\xi_k^*)}{\xi_n - \xi_k^*} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{(M^+G)_2}{s - \xi_n} ds, \quad n = 1, 2, \dots, 2N. \quad (5.6.4)$$

函数在点 $z = \xi_n^* \in D^-$ 上, 考虑 M^- 的 21 位置元素, 有

$$\mu_{-,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{iq_-}{\xi_n^*} \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{2N} \frac{C_k e^{i\theta(\xi_k)} \mu_{-,2}(\xi_k)}{\xi_n^* - \xi_k} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{(M^-G)_1}{s - \xi_n^*} ds, \quad n = 1, 2, \dots, 2N. \quad (5.6.5)$$

故 $z \rightarrow \infty$ 时, (5.6.2) 的渐近展开为

$$M(x, t, z) = I + \frac{1}{z} \left\{ i\sigma_3 Q_- + \sum_{n=1}^{2N} \left(\text{Res}_{\xi_n} M^+ + \text{Res}_{\xi_n^*} M^- \right) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} M^+(s)G(s) ds \right\} + O(z^{-2}). \quad (5.6.6)$$

取 $M = M^+$, 比较矩阵 (5.6.6) 和 (5.3.71) 的 12 位置元素, 可得 NLS 方程位势函数和 RH 问题解相联系的重构公式

$$q(x, t) = -i \lim_{z \rightarrow \infty} z(M^+)_{12} = q_- + \sum_{n=1}^{2N} C_n^* e^{i\theta(\xi_n^*)} \mu_{-,1,1}^{(1)}(\xi_n^*) + \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} (M^+(s)G(s))_{12} ds. \quad (5.6.7)$$

5.6.2 迹公式和 θ 条件

由前面指导 s_{11} 和 s_{22} 分别在 D^+ 和 D^- 上解析, 其离散零点分别为 $\{\xi_n\}$ 和 $\{\xi_n^*\}$, 则

$$\beta^+ = s_{11}(z) \prod_{j=1}^{2N} \frac{z - \xi_j^*}{z - \xi_j}, \quad \beta^- = s_{22}(z) \prod_{j=1}^{2N} \frac{z - \xi_j}{z - \xi_j^*}. \quad (5.6.8)$$

仍在 D^+ 和 D^- 上分别解析, 但不再有零点, 且 $\beta^+ \beta^- = s_{11} s_{22} (z \in \Sigma)$. 由

$$\det S(z) = s_{11}(z)s_{22}(z) - s_{12}(z)s_{21}(z) = 1 \implies \frac{1}{s_{11}(z)s_{22}(z)} = 1 - \rho(z)\tilde{\rho}(z) = 1 + \rho(z)\rho^*(z^*), \quad (5.6.9)$$

则

$$\beta^+ \beta^- = s_{11} s_{22} = \frac{1}{1 + \rho(z)\rho^*(z^*)} \implies \ln \beta^+ + \ln \beta^- = -\ln(1 + \rho(z)\rho^*(z^*)), \quad z \in \Sigma. \quad (5.6.10)$$

由 Plemelj 公式可得

$$\ln \beta^{\pm}(z) = \mp \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{\ln(1 + \rho(s)\rho^*(s^*))}{s - z} ds, \quad z \in D^{\pm}. \quad (5.6.11)$$

将上式代入 (5.6.8) 可得迹公式

$$s_{11}(z) = \exp \left[-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{\ln(1 + \rho(s)\rho^*(s^*))}{s - z} ds \right] \prod_{j=1}^{2N} \frac{z - \xi_j}{z - \xi_j^*}, \quad z \in D^+, \quad (5.6.12)$$

$$s_{22}(z) = \exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{\ln(1 + \rho(s)\rho^*(s^*))}{s - z} ds \right] \prod_{j=1}^{2N} \frac{z - \xi_j^*}{z - \xi_j}, \quad z \in D^-. \quad (5.6.13)$$

特别的, 无反射情形下, $s_{12} = s_{21} = 0$, 则上述迹公式可简化为

$$s_{11} = \prod_{j=1}^{2N} \frac{z - \xi_j}{z - \xi_j^*}, \quad z \in D^+; \quad s_{22} = \prod_{j=1}^{2N} \frac{z - \xi_j^*}{z - \xi_j}, \quad z \in D^-. \quad (5.6.14)$$

令 $z \rightarrow 0$ 则 (5.6.12) 化为 (此时 $s_{11} = q_-/q_+$, 见 (5.3.73))

$$\frac{q_-}{q_+} = \exp \left[\frac{i}{2\pi} \int_{\Sigma} \frac{\ln(1 + \rho(s)\rho^*(s^*))}{s} ds \right] \exp \left[4i \sum_{j=1}^{2N} \arg(\xi_j) \right], z \in D^+, \quad (5.6.15)$$

因此可得 θ 条件

$$\arg \frac{q_-}{q_+} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} \frac{\ln(1 + \rho(s)\rho^*(s^*))}{s} ds + 4 \sum_{j=1}^{2N} \arg(\xi_j). \quad (5.6.16)$$

特别的, 在无反射情形下, θ 条件化为

$$\arg \frac{q_-}{q_+} = 4 \sum_{j=1}^{2N} \arg(\xi_j). \quad (5.6.17)$$

注 这里的 θ 条件 (相位差条件) 揭示了非零边界 NLS 方程中宏观边界与微观散射数据之间的物理一致性: 系统在空间两端 ($x \rightarrow \pm\infty$) 的背景相位差 $\Delta\theta = \theta_- - \theta_+ = \arg(q_-/q_+)$, 为系统内部所有孤子 (离散谱) 的相位贡献与色散辐射 (连续谱) 的相位贡献之和. 同样也说明暗孤子的存在, 必然伴随着背景波的固定相位跳变, 没有相位差就暗孤子.

(这里 $\Delta\theta$ (相位跳变, Phase shift) 为物理方面的叫法, 数学方面叫相位差 (Phase difference))

5.6.3 无反射势情形

在无反射情形下, $G = 0$, 则 (5.6.4) 和 (5.6.5) 化为

$$\mu_{-,12}(x, t, \xi_j) = -\frac{iq_-}{\xi_j} - \sum_{k=1}^{2N} \frac{C_k^* e^{i\theta(\xi_k^*)} \mu_{-,11}(x, t, \xi_k^*)}{\xi_j - \xi_k^*}, \quad (5.6.18)$$

$$\mu_{-,11}(x, t, \xi_j^*) = 1 + \sum_{k=1}^{2N} \frac{C_k e^{i\theta(\xi_k)} \mu_{-,12}(x, t, \xi_k)}{\xi_j^* - \xi_k}, \quad j = 1, 2, \dots, 2N. \quad (5.6.19)$$

$$q(x, t) = q_- + \sum_{n=1}^{2N} C_n^* e^{i\theta(\xi_n^*)} \mu_{-,11}(x, t, \xi_n^*). \quad (5.6.20)$$

为表示方便, 引入记号

$$c_j(x, t, z) = \frac{C_j}{z - \xi_j} e^{-2i\theta(z)}, \quad j = 1, 2, \dots, 2N, \quad (5.6.21)$$

观察发现 $c_k^*(\xi_j^*) = C_k^*/(\xi_j - \xi_k^*)$. 则 (5.6.18) 和 (5.6.19) 化为

$$\mu_{-,12}(\xi_j) = \frac{iq_-}{\xi_j} - \sum_{k=1}^{2N} c_k^*(\xi_j^*) \mu_{-,11}(\xi_k^*), \quad (5.6.22)$$

$$\mu_{-,11}(\xi_j^*) = 1 + \sum_{k=1}^{2N} c_k(\xi_j^*) \mu_{-,12}(\xi_k), \quad j = 1, 2, \dots, 2N. \quad (5.6.23)$$

联立上式得

$$\mu_{-,11}(\xi_n^*) = 1 - iq_- \sum_{j=1}^{2N} \frac{c_j(\xi_n^*)}{\xi_j} - \sum_{j=1}^{2N} \sum_{k=1}^{2N} c_j(\xi_n^*) c_k^*(\xi_j^*) \mu_{-,11}(\xi_k^*), \quad n = 1, 2, \dots, 2N. \quad (5.6.24)$$

这样由公式 (5.6.20) 可知, 求解 NLS 方程解转化为求解上述线性方程组的 $\mu_{-,11}(\xi_n^*)$, 我们引入适当记号即可将其写为矩阵形式.

5.6.4 NLS 方程的 N 孤子解

引入记号

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_{2N})^T, \quad B = (B_1, B_2, \dots, B_{2N})^T, \quad A = (A_{nk}) \quad (5.6.25)$$

其中

$$X_n = \mu_{-,11}(\xi_n^*), \quad B_n = 1 - iq_-, \quad A_{nk} = \sum_{j=1}^{2N} c_j(\xi_n^*) c_k^*(\xi_j^*), \quad (5.6.26)$$

则方程组 (5.6.24) 改写为

$$MX = B, \quad M = I + A = (M_1, \dots, M_{2N}). \quad (5.6.27)$$

由 Cramer 规则可得

$$X_n = \frac{\det M_n^{rep}}{\det M}, \quad n = 1, 2, \dots, 2N, \quad (5.6.28)$$

其中

$$M_n^{rep} = (M_1, \dots, M_{n-1}, B, M_{n+1}, \dots, M_{2N}). \quad (5.6.29)$$

因此 NLS 方程的 N 孤子解可表示为

$$\begin{aligned} q(x, t) &= q_- + \frac{i}{\det M} \sum_{n=1}^{2N} Y_n \det M_n^{rep}, \\ &= q_- - \frac{i}{\det M} \sum_{n=1}^{2N} (-1)^{1+n+1} Y_n \det (B, M_1, \dots, M_{n-1}, M_{n+1}, \dots, M_{2N}), \\ &= q_- - i \frac{\det M^{aug}}{\det M}, \end{aligned} \quad (5.6.30)$$

其中 $Y_n = C_n^* e^{i\theta(\xi_n^*)}$, M^{aug} 为 M 的增广矩阵

$$M^{aug} = \begin{pmatrix} 0 & Y \\ B & M \end{pmatrix}, \quad Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_{2N}). \quad (5.6.31)$$

至此, 2×2 的非零边界的 NLS 问题已被解决, 由于 3×3 的非零边界在操作上和 2×2 差距较大, 故下一章节我们将继续学习 3×3 的零边界 NLS 方程, 以为后续的 3×3 的非零非局部方程做铺垫.

接下来的时间笔者要将注意力转移至利用 RH 方法激发怪波的研究上, 故该笔记暂缓更新. 2026.05.18

参考文献

- [1] Mark J. Ablowitz et al. “The Inverse Scattering Transform-Fourier Analysis for Nonlinear Problems”. In: Studies in Applied Mathematics 53.4 (Dec. 1974), pp. 249–315. ISSN: 1467-9590. DOI: [10.1002/sapm1974534249](https://doi.org/10.1002/sapm1974534249). URL: <http://dx.doi.org/10.1002/sapm1974534249>.
- [2] Deng-Shan Wang, Da-Jun Zhang, and Jianke Yang. “Integrable properties of the general coupled nonlinear Schrödinger equations”. In: Journal of Mathematical Physics 51.2 (Feb. 2010), p. 023510. ISSN: 0022-2488.
- [3] Jianke Yang. “General N-solitons and their dynamics in several nonlocal nonlinear Schrödinger equations”. In: Physics Letters A 383.4 (2019), pp. 328–337. ISSN: 0375-9601.
- [4] 范恩贵. 可积系统、正交多项式和随机矩阵——Riemann-Hilbert 方法. 科学出版社, 2022.